从调和级数到 Riemann 猜想 (RH)

(一) 简史

数学发展中的佳话，至今仍在不断进展中.

涉及许多数学家，特别是

Euler L. (1707~1783);

Riemann G. F. B. (1826~1866).

调和级数 (Harmonic Series) $\Longrightarrow$

Euler-Zeta 函数 $\zeta(K)$, K—正整数 $\Longrightarrow$

Rieman-Zeta 函数 $\zeta(s)$, s—复数, $s=\sigma+it$. $\Longrightarrow$

Riemann 猜想 (RH), (1859 前后).

1900, D. Hilbert 把 RH 列为 23 个问题之一.

认为可在几年内解决; Fermat 问题 (他有生之年解决); $2^{\sqrt{2}}$ 之超越性 (可能永不会解决).

后来发展与他预料相反. 有人问他: 500 年后复活, ...

近十余年, 美国 (Amer. Institute of Math.) 资助举办三次关于 RH 专题讨论会:

1996.8 西雅图的华盛顿大学;

1998.10 维也纳的 Erwin Schrodinger 研究所;

2002.5 纽约的 Courant 数学研究所.

2000.5.24 克莱数学促进会（Clay math. Institute）宣布对七个数学问题悬赏求解，每个100万美元。RH是其中之一。

(二) 调和级数

称级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 为调和级数(HS).

1) HS 发散到 ∞

$$\sum_n \frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{999}\right)+\cdots$$

$$> \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} + \cdots$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \cdots = \infty.$$

2). 试减少较多的项,以期得到一收敛级数. 只保留分母为素数 p 的项

$$\sum_p \frac{1}{p} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots = \infty, \quad \text{(出乎意料)}.$$

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + B + o(1) \qquad B \text{ 为常数}$$

3) 试删去分母中含 0 之项, 即删去 $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \cdots, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \cdots$ 似乎删去不多, 却剩下的项所成级数仍收敛, 和为 $23.10345\cdots$ (出乎意料) ([1] 1982)

4). 令 $S(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, Euler 的一个美妙结果:

$S(n)-\ln n \to \gamma = 0.5772157\cdots$ (Euler 常数).

这比 $\frac{S(n)}{\ln n} \to 1$ 要精确得多.

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

由于 $\ln n \to \infty$ 的速度很慢，可见 $S(n)$ 也如此。如

$$S(10^3) \approx 7.48; \qquad S(10^6) \approx 14.39$$

5) 所以称 $\sum \frac{1}{n}$ 为调和级数，一是由于它的通项 $a_n = \frac{1}{n}$ 是其前后二相邻项的调和平均，即

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right);$$

更深刻的原因与音乐有关。以同质同粗的弦，按长度为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 的比例，合以相等的张力拉紧于乐器上，其中两弦同时发音皆能调和。

又：将 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\cdots$ 相加，相当于将基因(弦长为1)与诸泛音(弦长 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$)合成一个音；反之，一个音可分解为基音与诸泛音 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 之组合，这也许是为何把 Fourier 分析也叫 Harmonic 分析之原因。

(三) Euler-Zeta 函数 $\zeta(K)$.

$$\zeta(K)=1+\frac{1}{2^K}+\frac{1}{3^K}+\cdots+\frac{1}{n^K}+\cdots \qquad K\text{—正整数.}$$

当 $K>1$ 时，$\zeta(K)<\infty$. 但 $\zeta(K)=?$

当K为偶数, Euler 能求出 $\zeta(K)$.

当K为奇数, 却出人意外地至今未求出一个

$\zeta(2n+1)$ (表为有限形式).

1) Euler 在其书《无穷小分析引论》(1748)求出

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \cdots,$$

$$\zeta(26)=\frac{2^{24}\cdot 76977927\cdot \pi^{26}}{27!}$$

2) 人们期待 $\zeta(2n)=\pi^{2n}\cdot R_{2n}$, R_{2n} 为有理数.

Euler 另一优美结果为

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2\,(2n)!},\qquad B_{2n}\text{ 为 Bernoulli 数:}$$

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\ \cdots$$

$B_{2n+1}=0$, $(n\geq 1)$. 递推式有下式:

3) $$\zeta(2n)=\frac{\zeta(2n-2)}{3!}\pi^2-\frac{\zeta(2n-4)}{5!}\pi^4+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{\zeta(2)}{(2n-1)!}\pi^{2n-2}+(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n+1)!}\pi^{2n}$$

4) Euler 恒等式：

$$\zeta(K)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{K}}\right)^{-1}, \qquad (K>1).$$

$\prod_{p}$ 表对一切素数求积.

此式把全体自然数与全体素数联系起来，是一极其重要的等式.

(四) 关于 $\zeta(3)=1.2020569031\cdots$

1) 1979, Apéry 证明 $\zeta(3)$ 为无理数.

有趣的是, 今人发现四个数

$$\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\approx 3.14159\cdots;\qquad \ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\approx 0.693147\cdots$$

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.64493\cdots;$$

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\approx 1.202056\cdots$$

的无理性, 可用同一思想来证明 ([17, 2001:3])

2) $\zeta(3)$与二项系数 $\zeta(3)=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3\binom{2k}{k}}$

此式由于Apéry的工作而出名.

3) 与积分 $\zeta(3)=10\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arc\,sinh}(y^2)}{y}dy$

4) 与级数 $\frac{2\pi^3}{81\sqrt{3}}+\frac{13}{27}\zeta(3)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^3}$;

$$\frac{\pi^3}{64}+\frac{7}{16}\zeta(3)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)^3}.$$

5) 与概率 在 $(1,2,\cdots,n)$ 中随机取三整数, 无大于1之公因子之概率 $\to\frac{1}{\zeta(3)}\approx 0.8319073725\cdots$, $(n\to\infty)$.

6) 与无穷乘积

$$\begin{pmatrix}0 & \zeta(3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{k}{2(2k+1)} & \frac{5}{4k^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

7) $\zeta(3)$是否超越数? (不满足任何整系数代数方程的实数称为超越数)

$\zeta(3)/\pi^3$ 是否无理数? (见[2])

（五） 关于一般的 $\zeta(2n+1)$

尚无有限形式（或称 closed）的表达式

1) $$\zeta(5)=\frac{1}{294}\pi^5-\frac{72}{35}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5(e^{2\pi k}-1)}-\frac{2}{35}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5(e^{2\pi k}+1)},$$

$$\zeta(7)=\frac{19}{56700}\pi^7-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^7(e^{2\pi k}-1)}$$

2) 当 $n\geq 2$ 时有

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \zeta(2n+1) \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta(2n-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta(5) \\ 0 & & 0 & \zeta(3) \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} A_k & B_k & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k^{2n}} \\ 0 & A_k & B_k & \cdots & 0 & \frac{1}{k^{2n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_k & \frac{1}{k^4} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k & 5/4k^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $A_k=-\dfrac{k}{2(2k+1)}$　　$B_k=\dfrac{1}{2k(2k+1)}$

3) $\zeta(2n+1)$ 是否无理数？

2000 年证明：有无穷多个 n 使 $\zeta(2n+1)$ 为无理数.

2001 年证明：$\zeta(5)$、$\zeta(7)$、$\zeta(9)$、$\zeta(11)$ 中至少有一为无理数.

4) 记 $R(n)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\zeta(k+1)}\frac{(\ln n)^k}{k!}$，$\pi(n)$ 表不大于 n 的素数个数. $R(n)$ 是 $\pi(n)$ 的极好近似（比 $\frac{n}{\ln n}$、$Li(n)$ 都好）. 例如，当 $n=10^8$ 时，$\pi(n)=5761455$，$R(n)=5761552$，$\frac{n}{\ln n}=5428681$，$Li\,n=5762209$.（$Li\,n\triangleq\int_2^n\frac{dt}{\ln t}$）.

（[3] p.200）

(六) 回顾:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+B+o(1),$$

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!},$$

$$\zeta(k)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{k}}\right)^{-1}.$$

(七) Riemann-zeta 函数 $\zeta(s)$.

今把 Euler-zeta 函数 $\zeta(K)$ 的定义域扩大到全复平面而成为 Rieman-zeta 函数 $\zeta(s)$, s一复变量.

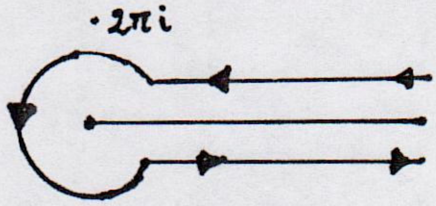
第一步 定义

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \qquad s=\sigma+it \tag{A}$$

此级数只当 s 的实部 $\sigma>1$ 时收敛, 上式有意义.
当 $\sigma\leq 1$ 时无意义. 但 Riemann 通过解析开拓, 可将 $\zeta(s)$ 的定义域扩展到全复平面, 这样扩展后的函数 $\zeta(s)$, $s\in$ 复平面, 称为 Riemann zeta 函数.
此函数除 $s=1$ 是一级极点外, 在其之外是解析的
但当 $\sigma\leq 1$ 时, 它有何表达式?

第二步 考虑积分

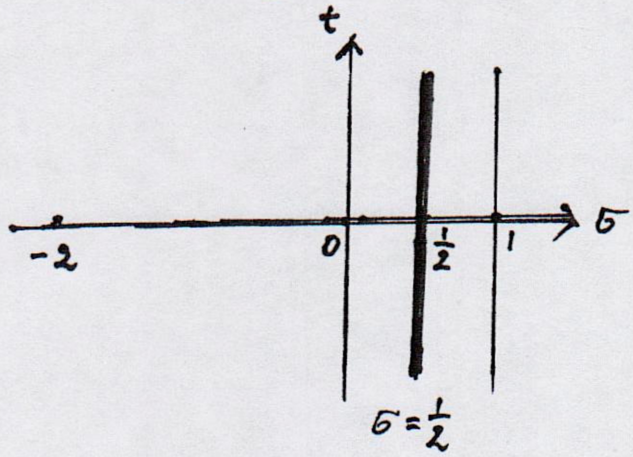
$$I(s)=\frac{-\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$



其中 Γ 为 Gamma 函数, 积分回路如图. 在 [4] 中已证明: 此积分对一切复数 s 有意义; 除有一级极点 $s=1$ 外, 在他处解析;
而且当 $\sigma>1$ 时 等于(A)中级数之值. 故可定义
Riemann-zeta 函数 $\zeta(s)$ 为 $\zeta(s)=I(s)$, 一切复变量 s.
当 $\sigma>1$ 时, 它可表为级数(A).

(八) Riemann 猜想 (RH)

Riemann 对 $\zeta(s)$ 作了深刻的研究，特别地，考察了 $\zeta(s)$ 的零点的分布。所谓 0 点，是指满足 $\zeta(s_0)=0$ 的点 s_0。0 点在哪里？Riemann 发现：$s=\sigma+it$



当 $\sigma>1$ 时无 0 点；

当 $\sigma<0$ 时只有平凡 0 点 $s_0=-2,-4,-6,\cdots$；

因此 $\zeta(s)$ 的其它 0 点，应全在带形域 $0\le\sigma\le1$ 中；

Riemann 又计算了几个 0 点如

$\frac{1}{2}+i\,14.134\cdots$，　$\frac{1}{2}+i\,21.022\cdots$　（实部 σ 全为 $\frac{1}{2}$）

于是他提出了著名的猜想：

RH：$\zeta(s)$ 的所有非平凡 0 点都在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

对 RH 的研究，一些进展如下：

1) 1893 年，Hadamand J.S. 证明：在带形域 $0\le\sigma\le1$ 中，$\zeta(s)$ 有无穷多个 0 点。

2) 1914 年，Hardy G.H. 证明：在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上 $\zeta(s)$ 有无穷多个 0 点。

3) 以 $N(T)$ 表矩形 $0\le\sigma\le1$, $0<t\le T$ 中 0 点个数,

1905 年, M. Von Mangoldt 证明

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\left(\ln\frac{T}{2\pi}-1\right)+O(\ln T)$$

4) 以 $N_{1/2}(T)$ 表直线段 $\sigma=\frac{1}{2}$, $0<t\le T$ 上 0 点个数,

1942 年, A. Selberg 证明: 存在正常数 A 使

$$N_{1/2}(T)>AN(T)$$

5) 1956 年 闵嗣鹤定出 $A>1/60000$。

1974 年 N. Levinson 改进为 $A>0.3474$。因此, 至少有 1/3 的非平凡 0 点在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上 (考虑到 0 点关于实轴对称)

1980 年楼世拓、姚琪改进为 0.35.

后来 Heath-Brown 又改进为 0.55

6) 人们采用计算机作辅助验证. 例如, 1982 年 Brent, Lune 等证明

$$N(T_0)=N_{1/2}(T_0)=4\times10^8,\qquad T_0=156762525.502$$

而且都是一级 0 点　　　　([5] p.221)

7). 如果 RH 正确, 则 $\zeta(s)$ 的任意级导数的所有 0 点都在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上. 至今已证明 $\zeta'''(s)$ 的超过 99% 的 0 点的确如此　([1] 2003:4)

8)《算术记录》主编收到一篇稿件……

(九) RH 的意义及其等价形式

1) RH 除本身的理论价值外，对其他数学分支，特别是解数论，也有显著的影响。如果 RH 成立，可以推出许多结果 [5].

回忆 $\pi(x)$ 表示不大于 $x\ (>0)$ 的素数个数，$\mathrm{Li}\,x \triangleq \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

关于对 $\pi(x)$ 的估计，至今最好的结果是：存在正数 A, B，使

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}\,x| \leq Bxe^{-A(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-3/5}} \qquad ([15]\ \text{P.}203)$$

此估计嫌大。如果 RH 成立，则可得到更好的结果：存在常数 $c>0$，使

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}\,x| \leq c\, x^{1/2} \ln x$$

反之，如此式成立，则 RH 正确。即 RH 与上式等价。

2) 回忆 $S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，并以 $\sigma(n)$ 表能整除 n 的整数之和 (例如，$\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$)

问题：试证对每 $n>1$，有

$$\sigma(n) < S(n) + \exp S(n) \ln S(n)$$

此问题等价于 RH. ([1] 2003:3)

3) RH 正确的充要条件是

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \ln\ln n, \quad 一切\ n \geq 5041$$

其中 $\gamma = 0.57721\cdots$ 为 Euler 常数. ([1], 2003:3)

4) Farey 数列与 RH. n 级 Farey 数列 F_n 是 $(0,1]$ 中一组上升的既约分数, 其分母不大于 n; 即

$$a/b \in F_n, \quad 如 \quad 0 < a \leq b \leq n, \quad (a,b)=1.$$

例: $F_4 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1)$

$F_5 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1)$

除 1 外, F_n 中任意三相邻的数 $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ 必有

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}$$

以 A_n 表 F_n 中之个数, 将 $(0,1]$ 等分为 A_n 个区间, 分点为 $\frac{1}{A_n}, \frac{2}{A_n}, \cdots, \frac{A_n-1}{A_n}$. F_n 中前 A_n-1 个之按原序记为 $f_n^1, f_n^2, \cdots, f_n^{A_n-1}$. 记 $D(n) = \sum_{i=1}^{A_n-1} \left| \frac{i}{A_n} - \frac{i}{f_n} \right|$

1942 年, J. Franel, E. Landau 提出命题: 对任 $r > 1/2$, 存在常数 C, 使 $D(n) < Cn^r$ 一切 n. 并证明此命题与 RH 等价. ([3] p195)

例: 对 F_4, $A_4 = 6$, $(f_4^1, f_4^2, f_4^3, f_4^4, f_4^5) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$

$$D(4) = \left|\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{2}{6}-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{3}{6}-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{4}{6}-\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{12} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

5) RH 成立，当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\,\zeta(2k+1)} = O(x^{-1/4}), \quad x \to \infty.$$

(Hardy & Littlewood, 1918).

6) RH 与(弱) Mertens 猜想 (MH) 等价.

先定义 Möbius 函数 $\mu(n)$：分解

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $\quad (k \geq 1, \ \alpha_i \geq 0)$，$p_i$ 为素数，$\neq p_j$

令 $\mu(1) = 1$，

$\mu(n) = 0$，至少有一 $\alpha_i \geq 2$

$= 1$，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$，$k$ 为偶

$= -1$，〃 〃，k 为奇

MH：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists$ 常数 A_ε，使

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \right| \leq A_\varepsilon\, x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \qquad ([13]\ p.208)$$

7) 广义 RH. ζ 函数的一种推广是 L 函数

$$L(\chi, s) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

其中 χ 满足某些条件. 所谓广义 RH 是：L 函数的非平凡 0 点都在直线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上. [10].

8) 臆测：黎曼 0 点与一个量子力学系统的能级相对应. [9], [16].

文献

[1] 数学译林 1982:4; 2001:2、3;

2003:2、3、4; 2004:1

[2] S.R. Finch, Mathematical constants. 2003. p.45

[3] K. Devlin, 数学:新的黄金时代 p.200

[4] V. Ahlfors, Complex analysis, 第三版.

[5] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础. 1997.

[6] 华罗庚, 数论导引.

[7] 楼世拓. 邬冬华. 黎曼猜想, 1995.

[8] A. Ivié, The Riemann-Zeta functions, 1985.

[9] 颜松远. 素数与素之一黎曼假设研究概述.

《科学》, 2004年11月

[10] 胡作玄 黎曼猜想. 《21世纪100个科学难题》. 1998

[11] 杜瑞芝 数学史辞典, 2000.

[12] 数学百科全书. 第四、五卷. 1999.

[13] 中国大百科全书 (数学卷), 1988.

[14] G.H. Hardy, E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, 1956.

[15] 闵嗣鹤. 严士健, 初等数论, 2003

[16] E. Klarreich, RH 和量子系统的能级, 数学译林 2003.2.

素数与零点——黎曼假设研究概况

◆颜松远

2000年5月24日，美国克雷(Clay)数学研究所公布了7个千禧数学问题。每个问题的奖金均为100万美元。其中黎曼假设被公认为目前数学中（而不仅仅是这7个）最重要的猜想。黎曼假设并非第一次在社会上征寻解答，早在1900年的巴黎国际数学家大会上，德国数学家希尔伯特列出23个数学问题，其中第8问题中便有黎曼假设（还包括孪生素数猜测和哥德巴赫猜想)。

如今第8问题仍悬而未决。由于黎曼假设与黎曼ζ函数的零点分布有关，而ζ函数的零点分布又与素数在正整数中的分布有关，而素数的分布又与许多数学问题甚至与计算机科学、密码学中的问题有关。这一环扣一环的关系，使得研究黎曼假设成了当今世界数学界甚至计算机科学界的一项刻不容缓的任务。

欧拉的贡献

最早提出ζ函数的并不是黎曼而是欧拉。欧拉本是瑞士人，但他却在俄国彼得堡度过了很长时间(1727—1741年，1766—1783年)，最终死于彼得堡。正是在欧拉的带动下，才使得建城不久的彼得堡一跃两度成为世界数学的中心。

大约在1730年，欧拉在研究调和级数$\sum_n \frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$时惊奇地发现，这种级数与素数有关，即：$\sum_n \frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\cdots=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$。其中$n$过所有正整数，$p$过所有素数。显然该级数发散。欧拉利用上述恒等式证明$\sum_p \frac{1}{p}=\infty$，从而推导出素数有无穷多个。虽然欧几里得早在2000年前就采用反证法证明这一结果，欧拉的精妙方法却有别于欧几里得的。欧拉第一次采用了解析方法，这既启发了出生于法国的德国数学家狄利克雷(P.Dirichlet)证明如下结论：当$(a,d)=1$时，任何形如$a,a+d,a+2d,\cdots$的算术级数均含有无穷多个素数，更启发了德国数学家黎曼对ζ函数做更进一步的研究。

虽然调和级数发散，但只要略施小技，便可使其收敛。事实上仅需将级数中的诸n变成$n^s(s>1)$即可。从函数论的观点看，欧拉实际上是定义了一个以s为实变量的函数$\zeta(s)$，称其为ζ函数，即$\zeta(s)=\sum_n \frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$。上式右端的无穷乘积一般称作“欧拉乘积”，以纪念欧拉的首创工作。

黎曼的拓广

黎曼本是一位大几何学家。19世纪中叶，德国格丁根是世界数学中心，高斯及其继承人狄利克雷都在数论研究上有突出贡献。高斯关于“数学是科学的皇后，数论是数学的皇后”之名言，以及狄利克雷随身携带高斯的数论名著《算术探讨》连睡觉都放在枕边的佳传，在数学界可谓家喻户晓。作为狄利克雷的继承人，也许黎曼觉得自己也应该像前辈先师那样在数论方面做些工作。1859年，黎曼发表了他一生中唯一的一篇题为“论在某一数值之前的素数个数”的数论论文，该

颜松远：教授，南开大学信息技术科学学院，天津 300071。

Yan Songyuan：Professor, College of Information Technical Science, Nankai University, Tianjin 300071.

论文仅 8 页纸。

正是在这短短的 8 页纸中，黎曼开创了解析数论(一门应用复变函数论研究数论的学科)的先河，并把欧拉提出的 ζ 函数推到了一个崭新的研究高潮。黎曼以欧拉 ζ 函数为起点，以高斯和法国数学家勒让德(A. Legendre)猜测的素数定理为目标，研究素数在正整数中的分布规律，并试图证明素数定理。

大约分别在 1792 年和 1808 年，高斯和勒让德猜测，令 $\pi(x)$为 0 至 x 的素数个数，则有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}=1$，或等价地$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)}=1$，$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\dfrac{\mathrm{d}t}{\log t}$。这就是著名的素数定理。这个看起来似乎是很简单的定理，其证明却使数学家伤透了脑筋，以至于人们惊呼：谁要是能第一个证出这个定理，谁就能长命百岁。事实还果真如此。最早同时独立证明素数定理的(1896 年)，一个是法国数学家阿达马 (J.Hadamard)，一个是比利时数学家德·拉·瓦莱普桑 (C. de la Vallée-Poussin)，这两人分别活到 98 岁和 96 岁!当然，素数定理还是不够精确，为了能够精确地估计出 $\pi(x)$的值，需要用到下面会讲到的黎曼 ζ 函数与黎曼假设。比如说，如果黎曼假设正确的话，那么 $\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(\sqrt{x}\log x)$。这也就是说，任何人要是证明了上式，就意味着他证明了黎曼假设。

虽然黎曼未能成功，但正是基于他的工作，长寿的阿达马和德·拉·瓦莱普桑才得以证出素数定理，黎曼却于 1866 年 40 岁时就不幸患肺结核去世。尽管黎曼像一颗流星，在数学界活跃的时间只有 15 年，但他的工作对数学的影响是不可估量的。

今天，重读黎曼的不朽篇章，备感其思想之深刻、寓意之深远。黎曼的贡献可简述如下。

黎曼首先将 ζ 函数的定义域从实数扩大到复数，即 $\zeta(s)=\sum\limits_n\dfrac{1}{n^s}=\prod\limits_p\left(1-\dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}$，其中复数 $s=\sigma+it$，n 过所有正整数，p 过所有素数。正是因为这一推广，才使得本该以欧拉命名的 ζ 函数变成了黎曼 ζ 函数；也正是因为这一推广，才将人们引到采用复变函数论的一整套理论与技巧来研究素数的分布规律，从而给数论注入了新的生命和方法，开辟了全新的道路。

在文中，黎曼还证明，ζ 函数可以解析开拓到整个复平面上，使其成为一亚纯函数。由此可算出：当 $s=-2,-4,-6,\cdots$时，$\zeta(s)=0$；而当 $s=-1,-3,-5,\cdots$时，$\zeta(s)$皆为非零之有理数(与所谓的伯努利数有关)。

黎曼进而研究了 ζ 函数的零点分布。$\zeta(s)=0$ 实际上只有两种情况：平凡零点(即全体负偶数)；非平凡零点(或复零点)，只出现在 $0<\sigma<1$ 的矩形区域中，且有无穷多个。黎曼给出了一个估计至 T 为止零点个数的公式。其次，在对 $\zeta(s)$的非平凡零点，尤其对前几个非平凡零点的分析计算之后，黎曼惊奇地发现，它们都落在 $\sigma=1/2$ 这条垂直的直线上。因此他进而猜测，$\zeta(s)$的所有非平凡零点都在直线 $\sigma=1/2$ 上。这就是闻名于世的黎曼假设。

黎曼假设在数学上十分重要。如果说欧拉关于 ζ 函数的主要贡献在于发现了 $\zeta(s)$ 与素数分布有关的话，即 $\zeta(s)=\prod\limits_p\left(1-\dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}$，其中 s 为实数；那么，黎曼关于 ζ 函数的主要贡献则在于发现了 $\zeta(s)$的零点分布与素数分布有关，即 $\zeta(s)=f(s)\prod\limits_\rho\left(1-\dfrac{s}{\rho}\right)$，其中 $s=\sigma+it$ 为复数，$f(s)$为一不太显要的函数因子，ρ 为 $\zeta(s)$之复零点。打个比喻说，因为 ζ 函数的零点分布与素数分布有关，就像音乐家可以从五线谱上听到音乐一样，数学家能从 ζ 函数的零点上“听”到素数的“音乐”，看到素数的“踪影”。

该假设从提出至今，既没有人证明，也没有人推翻。从目前掌握的情况看，黎曼假设可能正确，也可能错误。由于 $\zeta(s)$的零点分布与素数分布之间的关系非常复杂深刻，以至于时至今日人们仍不太了解其内在联系。因此，搞清楚 ζ 函数的零点分布与素数分布的关系，不但对数学本身的发展有利，与计算机科学与密码学的发展也相关。

哈代等人的努力

哈代(G.Hardy) 是 20 世纪上半叶最伟大的英国数学家。用哈代自己的话说，他一辈子力促两件事：证明黎曼假设，证明上帝不存在。哈代终生未婚，也不信宗教(这在宗教传统浓厚的剑桥大学是罕见的)。哈代和其忠实合作者李特尔伍德(J.Littlewood)合作 35 年，把剑桥办成世界数学的中心。

1914 年，哈代证明了 ζ 函数有无穷多个复零点在直线 $\sigma=1/2$ 上。这是一个非常重要的结果。1974 年，美国数学家莱文森(N.Levinson)在身患癌症临终前证明了“至少有 1/3 的复零点在直线 $\sigma=1/2$ 上”。进一步结果则显示，1/3 可以推进到 40%。

值得一提的是，李特尔伍德却不相信黎曼假设是正确的，这可能与他的一个研究成果有关。无论是高斯还是黎曼，都认为 $\pi(x)<\mathrm{Li}(x)$。据目前人们所掌握的数据看也确实如此。但李特尔伍德在 1914 年就证明了，$\pi(x)$和 $\mathrm{Li}(x)$之差的正负号可以变化无穷多次(也即 $\pi(x)$

可比 Li(x)小，也可比 Li(x)大，并且这种大小之间的变化可以是无穷多次)。1955 年，斯纽(S.Skewes) 证明：在 $x=10^{10^{10^{100}}}$之前，$\pi(x)$和 Li(x)的差要变一次符号。应用 ζ 函数的零点信息，可进一步推知：在 $x=10^{371}$ 之前，$\pi(x)$ 和 Li(x)的差要变一次符号。

所有这些至少说明，素数的分布规律并不像高斯和黎曼所想象的那么简单。也可能正因如此，李特尔伍德根本就不相信黎曼假设会正确。在他晚年曾收到一篇论文，其作者声称证明了黎曼假设。由于李特尔伍德年事已高、精力有限，发现不出其问题，因此他把它张贴在剑桥数学系的墙报栏上，果然不出数日，就有人发现了文中的错误。

$\pi(x)$与 Li(x)在若干数据上的比较

x	$\pi(x)$	Li(x)−$\pi(x)$
10^{12}	37607912018	38263
10^{13}	346065536839	108971
10^{14}	3204941750802	314890
10^{15}	29844570422669	1052619
10^{16}	279238341033925	3214632
10^{17}	2625557157654233	7956589
10^{18}	24739954287740860	21949555
10^{20}	2220819602560918840	222744644

计算的作用

目前关于黎曼假设的研究，主要集中在如下两个方面：数学证明与数值验证。在数学证明方面，当代著名的法国数学家、1982 年菲尔兹奖得主孔涅(A. Connes) 开创了从非交换几何的角度来研究黎曼假设的新思维。另外，在证明相对困难的阶段，计算却发挥着重大作用，尤其是在现代巨型计算机及网络技术高速发达的今天。

黎曼本人当推数值验证黎曼假设的第一人。他在计算出前 3 个 ζ 函数的复零点(以虚部 $t>0$ 为准，以下均同)时，发现它们均在直线 $\sigma=1/2$ 上。从这一点讲，黎曼还是很幸运的，因为他只算了 3 个复零点，就断定所有复零点都在直线 $\sigma=1/2$ 上。至少到目前为止，人们还没有发现一个反例。相比而言，费马就很不幸了，因为费马通过计算发现，当 n=0，1，2，3，4 时，形为 $F_n=2^{2^n}+1$ 之数均为素数，从而认为这种数都是素数。然而当 n=5 时，欧拉发现 $F_5=641\times6700417$ 并不是素数；更糟糕的是，从 n=5 开始，人们再也没有发现一个 F_n 为素数。费马一生提出过许多猜测(包括费马大定理)，但就这一个猜测是错误的。这正是智者千虑，必有一失。

但是，至于黎曼是用什么方法计算出这 3 个点的，尤其是如何据此提出黎曼假设的，在文章中他并没有交代。在黎曼死后，他的房东将他留下的大部分手稿付之一炬(可能是怕肺结核传染)。很有幸的是，居然有很少一部分手稿被他的遗孀保留下来，并辗转捐赠给了格丁根大学图书馆，从而使格丁根大学的数学家西格尔(C.Siegel)在 1932 年得以从黎曼的杂乱无章的手稿中"挖掘"出当年黎曼计算 ζ 函数复零点的思路，并整理出后人称之为"黎曼–西格尔"的计算公式(法)。很有意思的是，在西格尔整理出"黎曼–西格尔"公式后，仍花了 3 年时间去证明这个公式。

第一个系统计算 ζ 函数零点的人，当推格拉姆(G. Gram)，他算出了 ζ 函数的前 15 个零点。现代计算机科学的开山鼻祖图灵可以认为是第一个在现代计算机(Mark I)上验证黎曼假设的人，并且他关于 ζ 函数零点计算的论文是他生前最后一篇论文（发表于 1953 年，计算了 1104 个零点）。现代计算数论之父、美国数学家莱默(D.Lehmer)则是第一个采用大规模计算技巧来验证黎曼假设的人，他于 1956 年算出 25000 个零点。而澳大利亚计算机科学家布伦特(R.Brent)与荷兰计算机科学家冯·德·伦(J.van de Lune)等人则是最早在巨型机上验证黎曼假设的人，他们于 1986 年及 2001 年算出 ζ 函数的前 1500000001 个和前 100 亿个复零点。最近，德国数学家韦德尼斯基(S.Wedeniwski)等人更是利用现代分布网格计算技巧于 2003 年算出了 ζ 函数的前 2000 亿个零点，他们的计算还在继续深入。截止到 2004 年 10 月 26 日前，ζ 函数的 10^{13} 个复零点都已算出。

显然，目前所算出的所有 ζ 函数的非平凡零点确实都落在了直线 $\sigma=1/2$ 上。随着 t 值的不断上推，将会有更多的非平凡零点被算出。只要能在 $0<\sigma<1$ 的矩形区域内找到一个零点，它不在直线 $\sigma=1/2$ 上，黎曼假设就不攻自破了。所以，数值验证虽然不能用来证明黎曼假设的正确性，但若黎曼假设不正确，数值验证法则有可能用来找出一个反例。所以，在黎曼假设的正确性不明朗的情况下，数值验证法还是很有用处的。当然，这种反例的寻求随着 t 值增大而非常困难。也正因为困难，各种现代化的计算技巧(如并行计算、分布计算、网格计算、量子计算、分子计算等)与计算设备(如巨型计算机、量子计算机、专用计算机网络等)才有它们的用场。在此需要特别指出，目前用于计算 ζ 函数

奇妙的素数世界

任何一个小学两三年级的学生都知道什么是素数，但是任何一个伟大的数学家其实又都弄不懂素数，或者可以说是只知其一而不知其二。这是因为素数变化无穷、神秘莫测。也许正因如此，千百年来才引来无数英雄为此折腰。下面看几个典型例子和最新进展。

孪生素数 有些素数能够以 $n\pm1$ 之孪生形式成对出现，如 3 和 5，41 和 43 等。虽然素数有无穷多个，但人们并不知道孪生素数是否也有无穷多对，只是猜测在 x 之前的所有孪生素数对数渐进于 $c\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}$，其中 c=1.3203…。目前人们所知道的最大孪生素数为 $33218925\times2^{169690}\pm1$，它们各有 51090 个十进制位。还有一类与孪生素数有关的、以法国女数学家热尔曼(S.Germain)的名字命名的素数 p，即 $2p+1$ 同时也为素数。对于这类素数，人们依然不知其是否有无穷多个，只是猜测在 x 之前的热尔曼素数的个数渐进于 $\frac{cx}{\log^2 x}$，其中 c=1.3203…仍为孪生素数常数。很奇怪的是，这类素数的分布竟然与计算数论及密码学中的快速测试之计算复杂性有关。

梅森素数 这是一种以 17 世纪法国僧侣出身的数学家梅森(M.Mersenne)的名字命名的素数，其形式为 2^p-1，其中 p 为素数。时至今日，人们只找到 41 个梅森素数，最大的一个为 $2^{24036583}-1$，它有 7235733 个十进制位。美国电子基金会(Electronic Frontier Foundation) 愿出 10 万美金奖励第一个找到超过 1000 万位梅森素数的人(这并不困难，因为 $2^{24036583}-1$ 已经超过 700 万位了)。对于梅森素数，人们至今仍不知它们是否有无穷多个。

整数分解 任何一个大于 1 的正整数都可以唯一地被分解成素数之乘积，这被称为“算术基本定理”，是数论中最基本的一个定理，欧几里得可能早就已经知道这一事实。但是该定理的证明只告诉我们“整数分解”的存在性与唯一性，而并没有告诉我们如何去真正求出这种素数的分解形式。

目前最快的整数分解算法是数域筛法，其计算复杂性为

$$O\left(\exp\left(c\sqrt[3]{\log n}\sqrt[3]{(\log\log n)^2}\right)\right),$$

其中 c 为大于 1 的常数，显然这是一个运算速度很慢的指数复杂性算法。

正因为整数分解很困难，人们才得以利用它的原理来设计难以破译的密码，例如由里维斯特(R.Rivest)、沙米尔 (A.Shamir)、阿德尔曼(M.Adleman)在 1978 年创立的 RSA 密码体制，就是这样一种在实际上难以破译的密码。只要整数分解问题解决了(也即整数分解可以快速进行)，RSA 密码体制之破译也就迎刃而解。下面这个数有 212 位，它有两个素因子。RSA 愿奖励 3 万美元给第一个分解出这个数的人：

74037563479561712828046796097429
57314259318888923128908493623263
89727650340282662768919964196251
17843995894330502127585370118968
09828673317327310893090055250511
68770632990723963807867100860969
6253793465056379635 9

零点的方法主要有三种：欧拉-麦克劳林法，速度较慢，但精度高，今天仍有人在使用；黎曼-西格尔法，目前最常用的一种方法；奥德里兹科-舍哈格(Odlyzko-Schöhage) 法，是继欧拉-麦克劳林法和黎曼-西格尔法之后的第三种方法，速度最快，但还没有前两种方法流行。

物理的介入

应用（混沌）量子物理的思想及方法研究黎曼假设，是目前很热门的一个研究方向，并且该法可以追溯到蒙哥马利 (H.Montegomery)1972 年访问普林斯顿高等学术研究院(IAS)的时候。笔者曾在 2004 年 7 月 5 日英国诺丁汉大学的一次数论会议上亲耳聆听蒙哥马利讲述这段故事。蒙哥马利本是美国人，但他却在大学毕业后(1960 年代后期)到英国剑桥，在达文波特(H.Davenport)的指导下攻读博士学位，并同时得到李特尔伍德及菲尔兹奖得主贝克 (A.Baker)(贝克昔日的博士导师也是达文波特)等人的指导，于 1972 年 3 月毕业，随即在美国密歇根大学找到一份工作，且一直工作至今。李特尔伍德有句名言：不必害怕黎曼假设。正是在李特尔伍德的指点下，蒙哥马利开始研究探索黎曼假设。1972 年春季，在美国圣路易斯的数论会议上，蒙哥马利报告了他关于 ζ 函数两两复零点的间隔之分布的研究及猜测：

$$\sum_{\frac{2\pi\alpha}{\log T}<\gamma-\gamma'<\frac{2\pi\beta}{\log T}} 1 \sim N(T)\int_\alpha^\beta\left(1-\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2\right)du,$$

其中上式左边的求和为满足 $0<\gamma$，$\gamma'<T$ 的在 $\alpha<\beta$ 之间的规范化间隔的零点对个数。$N(T)$ 为至 T 的零点个数。

在会议结束返回剑桥时，蒙哥马利借道普林斯顿，欲拜见并当面求教“当代数学之高斯”赛尔伯格(A.Selberg)。赛尔伯格是一位出生于挪威的数学家，因在 1949 年首次用初等方法(即不用黎曼 ζ 函数、不用任何

高级分析工具)证明素数定理而获得1950年度的菲尔兹奖，并被聘为IAS的终身教授，且一直在IAS工作(现为退休教授)。世界上的事情往往都是巧合的。在IAS的下午茶会上，蒙哥马利被著名数论专家乔拉(S.Chowla)介绍去见物理学家戴森(F.Dyson)。乔拉是一位在英国出生并在剑桥博士毕业的印度数论专家，也是唯一一个与赛尔伯格合写过论文的人(赛尔伯格习惯于孤身作战，从不与别人合作，只和乔拉合作过一次)。蒙哥马利本并不想见戴森(因为他只想见赛尔伯格)，但碍于乔拉的引荐，便勉强过去和戴森见面交谈。

这是一次十分不寻常的见面与交谈，并导出了用物理方法研究黎曼假设的新局面。戴森是英国人，在剑桥大学完成学位后到美国康奈尔大学学习物理。1953年他被聘为IAS的终身教授(戴森目前仍为IAS的退休教授)。戴森虽是个物理学家，但他的学术生涯却是从数论开始的(还曾师从过哈代，后来戴森为自己转行而惟恐哈代伤心，因为哈代把纯数学看得至高无上，如今戴森又无意间涉足黎曼假设，哈代要是活着的话想必也会有所感慨)，和蒙哥马利在剑桥的导师达文波特是老朋友，二战期间两人又同为英军从事过雷达方面的研究。当时，德高望重的戴森很友好地问年轻的蒙哥马利从事什么方面的研究。蒙哥马利就把他关于ζ函数两两复零点的间隔之分布的猜测告诉戴森，正当他要告诉戴森这些间隔分布的图像时，戴森突然眼睛发亮，并打断说：那和量子物理随机厄米矩阵中的两两特征值的差别的情况完全相同。

这真是一语道破天机！戴森很自然地将数论中ζ函数两两复零点的间隔分布与量子物理随机厄米矩阵中的两两特征值的差别联系到了一块，从而人们可以从研究随机厄米矩阵中的两两特征值的差别入手，来研究ζ函数两两复零点的间隔分布，并进而研究ζ函数复零点分布的普遍规律，最终达到解决黎曼假设的目的。

目前应用量子物理方法来研究黎曼假设的领袖人物当推英国布里斯托尔大学物理系的贝里(M.Berry)和基廷(J.Keating)。贝里在2000年曾说过：我感到，黎曼假设将会在近几年内得到解决。整整4年过去了，黎曼假设依然没有动静。物理学大师费恩曼曾说过：很保险地说，目前还没有人真正理解量子力学。我们相信，用一个人们还不太了解但又很有前途的量子理论来研究一个人们还不太了解的数学问题(即黎曼假设)，有可能得出极为深刻的、出人意料的成果，甚至给数学、物理学乃至计算科学带来一场革命。这正是黎曼假设的真正价值所在。

关于黎曼假设的一些轶事

黎曼假设是如此地深刻、艰难，令历代数学家心驰神往，如痴如醉，其中不乏大数学家。

首先提到的是英国大数学家哈代。他身居英伦小岛，却与欧洲大陆的数学家保持着极为密切、友好的关系。每次到丹麦拜访老朋友玻尔(H.Bohr)时，他们会坐下来，先在一张纸上写上所要讨论的议题，议题的第一条又往往都是“证明黎曼假设”。当然最终又总是没有结果。

有一年夏天，哈代结束他在欧洲的访问，准备渡海回国时，正遇那天气候恶劣、海浪汹涌，危险万分。于是哈代情急之中给玻尔发了一张明信片，上面写着“我已经证明出黎曼假设——哈代”。哈代的“理由”是：万一翻船身亡，人们会以为他真地证出了黎曼假设。既然老天爷不会轻易给他这份殊荣，也就不至于让他出事。结果他平安回到了英国。

另一位对黎曼假设念念不忘的是20世纪的领袖数学家希尔伯特。在其晚年时，有人问他：如果你死后500年还能复活的话，那么你第一件要做的事是什么？希尔伯特当即回答：要看看黎曼假设是否被证明出来了。

[1] Apostol T M.*Introduction to Analytic Number Theory*.New York: Springer, 1998

[2] Bombieri E.*Problems of the Millennium:The Riemann Hypothesis*. Boston: Clay Mathematics Institute, 2001

[3] Conrey J B. *Notice of the AMS*, 2003:341

[4] Edward H M. *Riemann's Zeta Function*. New York:Dover Publications, 2001

[5] Ingham H M. *Distribution of Prime Numbers*, 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1986

[6] Ivic A. *The Riemann Zeta-Function*. New York: Wiley, 1985

[7] van de Lune J, te Riele H J J, Winter D T. *Mathematics of Computation*, 1986, **46**: 667

[8] Odlyzko A M, Schöhage A. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1988, **309**: 797

[9] Patterson S J. *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

[10] Stopple J. *A Primer of Analytic Number Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

[11] Titchmarsh E C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd Edition (Revised by Heath-Brown R D).Oxford: Oxford University Press, 1986

关键词：素数 素数分布 黎曼假设 黎曼ζ函数

[12] A.A. Karatsuba and M.A. Korolev. The argument of the Riemann zeta function. Russian Mathematical surveys, 60, 3, 2005, 433~488