国家基金委和教育部博士点基金资助项目
2006年12月22日 · 中科院数学所学术报告厅

华罗庚域的创建与研究

The Construction and Research of Hua Domains

殷慰萍

首都师范大学数学科学学院

wpyin@263.net or wyin@mail.cnu.edu.cn

华罗庚域的创建与研究

1 前言

- 自1998年以来, 殷慰萍创建了Cartan-Hartogs域, Cartan-Egg域, 华罗庚域, 广义华罗庚域和华罗庚结构等五类域, 其中前两类是华罗庚域的特殊情况, 后二类是华罗庚域的推广, 因此这五类域统称为华罗庚域.
- 华罗庚域的创建, 统一了多复变中的对称典型域和蛋型域的研究, 给多复变函数论提供了一个新的研究领域. 因而罗庚域的创建是一种源头创新和自主创新.
- 首都师范大学以殷慰萍和王安为代表的多复变研究群体自1998年以来对华罗庚域进行了系统的研究, 共发表了有关论文70多篇. 主要围绕着以下4个研究方向进行.
- 给出华罗庚域上的Bergman核函数的显表达式;
- 证明Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理, 证明Einstein-Kähler度量和Kobayashi度量的比较定理;
- 显式求出完备Einstein-Kähler度量;
- 研究经典度量的等价问题, 证明了Bergman度量等价于Einstein-Kähler度量的这一丘成桐猜想在Cartan-Hartogs域也成立.

- 其余例如Bergman度量的完备性, 积分表示, Bloch函数, 极值问题等方面的结果就不赘述了. 现在又增加了华罗庚域上陆启铿问题的研究.
- 原则上, 对于Cartan域和蛋型域的任何研究课题都可以在华罗庚域上进行研究, 因为老的方法行不通, 需要思想和方法上的创新.
- 所获成果得到国内外专家的好评, 并在国际上产生了一些影响
- 陆启铿院士在2005年2月认为华罗庚域的创建开拓了一个新的研究领域, 对于华罗庚域的研究认为是“以殷慰萍教授为首的研究集体近年来在多复变数上做出了国内近五、六年内最出色的成果”;
- 韩国的国立首尔大学(Seoul National University.)教授Chong-Kyu Han(韩锺圭)邀请殷慰萍前去作关于华罗庚域的研究的系列报告, 并初步建立了合作研究华罗庚域的关系, 他们已经派了Jong-Do Park（朴鐘燾）博士来访首都师范大学, 王安教授将于明年4月访问首尔大学.
- 值得一提的是, Jong-Do Park博士将全额由首尔大学资助, 不用我方出资, 再次要求来访首都师范大学合作研究华罗庚域.
- 法国教授G.Roos已经发表了两篇关于研究华罗庚域的论文; 法国Mrs F.Z. Demmad研究了Cartan-Hartogs域低维情况下的陆启铿问题;
- 瑞典哥德堡大学张根凯(Gengkai Zhang)教授2005年在首都师范大学作演讲的题目就是“华罗庚域上的再生核”.

我们对华罗庚域的创建作一个简单的历史回顾，对迄今为止所取得的阶段性成果作一个综述和总结；

这里以第一类Cartan-Hartogs域为例，突出介绍一些新的思想和方法，提出了一些尚未解决的问题；

希望更多的学者通过我们的介绍，对华罗庚域有兴趣而进行更为深入的研究．本报告的主要内容原先将发表在《数学进展》2006年的最后一期上．11月中旬告知，将延迟发表于《数学进展》2007年第二期，即4月份的那一期．

2 致谢

华罗庚域的研究自1998年创建以来得到国家自然科学基金委员会九五数学重点项目和二次面上项目的支持, 得到北京市自然科学基金委员会二次面上项目的支持, 自2005年开始还得到教育部高等学校博士学科点专项科研基金的支持, 特此致谢. 项目名称和批准号如下:

- 国家自然科学基金委员会九五数学重点项目《多复变函数论》, 批准号:19631010, 起止年月: 1997.01-2001.12.
- 国家自然科学基金委员会面上项目《拟凸域上的复几何分析》, 批准号:10171068, 起止年月: 2002.01-2004.12.
- 国家自然科学基金委员会面上项目《多复变函数论中的华罗庚域的几何分析》, 批准号:10471097, 起止年月: 2005.01-2007.12.
- 北京市自然科学基金委员会面上项目《当代复几何分析的若干问题》, 批准号:1972002, 起止年月: 1997.09-2001.09.
- 北京市自然科学基金委员会面上项目《现代复几何分析》, 批准号:1012004, 起止年月: 2002.09-2005.09.
- 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目《华罗庚域的复几何分析》, 起止年月: 2005.01-2007.12.

3 华罗庚域的创建

- 华罗庚域是建立在对称典型域的基础上的, 因此首先介绍对称典型域.
- 3.1. 对称典型域

  众所周知, E.Cartan在上世纪30年代对多复变数空间中的不可约的有界对称域在双全纯等价的条件下进行了成功的分类[01], 总共有四大类和两个复维数分别为16和27的例外情况. 华罗庚[02]在上世纪50年代, 对四大类的对称典型域进行了系统的研究, 取得了国际领先的成果, 获得了中国第一届自然科学奖一等奖, 其成果总结在他的《多复变函数论中的典型域的调和分析》名著中, 现已成为多复变的经典著作, 至今还常被引用. 这些域称之为对称典型域, 以区别于非对称的情况, 而由于是Cartan进行分类而得到的, 故又称之为Cartan域.
- 四大类典型域的矩阵实现为:

$$
\begin{aligned}
R_I(m,n) &:= \{Z \in \mathbb{C}^{mn} : I - Z\overline{Z}^t > 0,\},\\
R_{II}(p) &:= \{Z \in \mathbb{C}^{p(p+1)/2} : I - Z\overline{Z}^t > 0,\},\\
R_{III}(q) &:= \{Z \in \mathbb{C}^{q(q-1)/2} : I - Z\overline{Z}^t > 0,\},\\
R_{IV}(n) &:= \{Z \in \mathbb{C}^{n} : 1 + |ZZ^t|^2 - 2Z\overline{Z}^t > 0, 1 - |ZZ^t|^2 > 0\}.
\end{aligned}
$$

- 这里Z分别表示(m,n)矩阵, (p,p)对称方阵,(q,q)斜对称方阵和$(1,n)$矩阵, $\overline{Z}$表示Z的共轭, Z^t表示Z的转置.
- 至于16维和27维的两个例外域(分别记为$R_V(16), R_{VI}(27)$)的矩阵实现可以参阅[03].
- 假如$m=1$, 则$R_I(1,n)$ 就是$\mathbb{C}^n$ 中的超球, 即$R_I(1,n)=B_n(0,1)=B_n$. 当$m=n=p=1, q=2$时, 上述四类域都代表单位圆盘. 因此, 这四大类对称典型域都可以看成是复数平面上的单位圆盘在高维的推广.
- 这些典型域的集合记为$\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$, 即

$$\mathcal{R}_{\mathcal{H}}=\{R_I(m,n), R_{II}(p), R_{III}(q), R_{IV}(n), R_V(16), R_{VI}(27)\}.$$

- 3.2. 华罗庚域的故事

  1998年2月殷慰萍访问法国高等科学研究院(Institut Des Hautes Etudes Scientifiques, 简称IHES), Guy ROOS教授邀请殷顺访普瓦捷大学(University of Poitiers)并作演讲, 殷演讲的题目是“蛋型域上的一些结果”(Some Results on Egg Domain),

- 这里的蛋型域(Egg domain)具有以下形式:

$$E(K) = \{w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n : |w|^{2K} + |z|^2 < 1\}.$$

  那时Roos提了一个问题, 由于上述蛋型域可以写为:

$$\{w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n : |w|^{2K} < 1 - |z|^2\}.$$

  这不等式的右边为$1 - |z|^2 > 0$, 这是超球B_n的表示式. 因而该蛋型域就等价于

$$\{w \in \mathbb{C}, z \in B_n : |w|^{2K} < 1 - |z|^2\}.$$

  这表明该蛋型域是建立在B_n的, 而B_n 是Cartan域的特殊情况. Roos的问题就是能否像上述蛋型域那样构造一个建立在Cartan域上的域?

- 殷慰萍给出了这问题的正面回答:

$$Y_I(N,m,n;K)=\{W\in\mathbb{C}^N, Z\in R_I(m,n): |W|^{2K}<det(I-Z\overline{Z}^t), K>0\},$$

$$Y_{II}(N,p;K)=\{W\in\mathbb{C}^N, Z\in R_{II}(p): |W|^{2K}<det(I-Z\overline{Z}^t), K>0\},$$

$$Y_{III}(N,q;K)=\{W\in\mathbb{C}^N, Z\in R_{III}(q): |W|^{2K}<det(I-Z\overline{Z}^t), K>0\},$$

$$Y_{IV}(N,n;K)=\{W\in\mathbb{C}^N, Z\in R_{IV}(n): |W|^{2K}<1-2Z\overline{Z}^t+|ZZ^t|^2, K>0\},$$

这里det 表示行列式, N,m,n,p,q 都是自然数. 这种域, 殷慰萍称之为Cartan-Hartogs域, 或超Cartan域.

- 殷慰萍回到北京之后, 计算出了它们的Bergman核函数的显表达式[04-12]. 例如, 第一类Cartan-Hartogs域$Y_I(1,m,n;K)$的Bergman核函数为:

$$K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}F(Y)det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+1/K)}.$$

其中

$$F(Y)=\sum_{i=1}^{mn+1}a_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}.$$

$$Y=(1-X)^{-1}, X=|W|^2[det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-1/K}.$$

而a_i(i=1,2,...)都是常数.

- 在Cartan-Hartogs域的定义中, 不等式的右边在Jordan Triple System中称为该域的generic norm. 令$N_D(Z,\overline{Z})$ 表示域D的generic norm, 则Cartan-Hartogs域可以定义为

$$Y(N,D;K)=\{W\in\mathbb{C}^N, Z\in D:|W|^{2K}<N_D(Z,\overline{Z}), D\in\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

- 其后, 殷慰萍把Cartan-Hartogs 域推广为如下的所谓Cartan-Egg 域:

$$\{W_1\in\mathbb{C}^{N_1}, W_2\in\mathbb{C}^{N_2}, Z\in D:|W_1|^{2K}+|W_2|^2<N_D(Z,\overline{Z}), D\in\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

它们的Bergman核函数也可以显式求出[12-16].

- 其后殷慰萍又把它们推广成如下的华罗庚域:

$$\{W_j\in\mathbb{C}^{N_j}, Z\in D:\sum_{j=1}^{r}||W_j||^{2p_j}<N_D(Z,\overline{Z}), p_j>0, j=1,\dots,r.D\in\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

这里$||W_j||^2=\sum_{k=1}^{N_j}|w_{jk}|^2$. 而其Bergman核函数也可显式求出[17-21].

- 其后, 殷慰萍又更广泛得到以下的域:

$$\{W_j \in \mathbb{C}^{N_j}, Z \in D : \sum_{j=1}^{r} ||W_j||^{2p_j} < [N_D(Z,\overline{Z})]^K, p_j > 0, j = 1, \ldots, r. D \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

这称之为广义华罗庚域. 其Bergman核函数的显式也可以求出[22,23]. 而广义华罗庚域可以改写成如下形式:

$$\{W_j \in \mathbb{C}^{N_j}, Z \in D : \sum_{j=1}^{r} \frac{||W_j||^{2p_j}}{[N_D(Z,\overline{Z})]^K} < 1, p_j > 0, j = 1, \ldots, r. D \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

这里的不等式左边的r个式子的分母都是相同的.

- 假如分母可以不相同, 那么就得到下述的域称之为华罗庚结构:

$$\{W_j \in \mathbb{C}^{N_j}, Z \in D : \sum_{j=1}^{r} \frac{||W_j||^{2p_j}}{[N_D(Z,\overline{Z})]^{K_j}} < 1, p_j > 0, K_j > 0, 0 < j \leq r. D \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}\}.$$

- 很幸运的是, 华罗庚结构的Bergman核函数也都可以显式求出[24,25].

- 众所周知, 能显式求出其Bergman核函数的域的类型很少, 而且极其困难. 因此很多数学家认为能够显式求出Bergman核函数的域是很值得研究的域.
- 以往只知道有界齐性域和蛋型域属于此类, 现在又有了上述可以显式求出其Bergman核函数的域的类型, 这是很有意义的事情.
- 在下列四种情况下, 华罗庚域的Bergman核函数不但可以显式求出, 而且可以用初等函数来表达:

  (I) $r = 1, p_r = p_1 = K$;

  (II) $p_1 = p_2 = \cdots = p_{r-1} = 1, p_r > 0$,;

  (III) $1/p_1, \ldots, 1/p_r$ 都是正整数;

  (IV) $1/p_1, \ldots, 1/p_{r-1}$ 都是正整数, 而$p_r > 0$.

  以上就是创建华罗庚域的简单的历史. 下面综述华罗庚域上所得到的重要研究成果.

4 华罗庚域的Bergman核函数

- 单复变数和多复变数情况下的Bergman核函数是由波兰数学家S.Bergman分别在1922年和1933年引进的[26,27].

  设D是$\mathbb{C}^n$中的有界域, 若$H(D)$表示所有在D全纯的函数的集合, 令

$$L_a^2(D)=\{f(Z)\in H(D):\int_D|f(Z)|^2dV<\infty\}.$$

这里dV表示域D的欧氏测度. 则$L_a^2(D)$是一个Hilbert 空间, 其内积为:

$$<f,g>=\int_D f(Z)\overline{g(Z)}dV, f,g\in L_a^2(D).$$

它具有可数基. 设$\{\phi_k(Z)\}, k=1,2,\ldots$是$L_a^2(D)$的完备的标准正交基. 则

$$K_D(Z,\overline{T})=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(Z)\overline{\phi_k(T)}, (Z,T)\in D\times D. \tag{2.1}$$

称为域D的Bergman核函数, 它是唯一的, 且不依赖于域D的完备标准正交基的选择.

- 它又称为域D的再生核, 即它有如下的再生性质: 对任意的$f \in L_a^2(D)$有

$$f(Z) = \int_D f(T)K_D(Z,\overline{T})dV_T, Z \in D. \qquad (2.2)$$

这是域D的Bergman核函数的一个特征性质, 也就是说, 式子(2.2)可以作为域D的Bergman核函数的定义.

- 由于从$K_D(Z,\overline{Z})$很易得到$K_D(Z,\overline{T})$, 因而下面考虑$K_D(Z,\overline{Z})$.

设T_0是域D的一个固定点, $W = F(Z)$是域D的全纯自同构变换, 它把Z_0映为T_0, 设$J_F(Z)$是此变换的Jacobian矩阵, 令det表示行列式. 则有

$$K_D(Z_0,\overline{Z_0}) = \{K_D(F(Z),\overline{F(Z)})|detJ_F(Z)|^2\}_{Z=Z_0}, \qquad (2.3).$$

若D是一个可递域(也叫齐性域), 则Z_0可以是D内任意一点而再以Z表之. 就得到如何求齐性域D的Bergman 核函数的公式, 即

$$K_D(Z,\overline{Z}) = c|detJ_F(Z)|^2|_{Z_0=Z}, \qquad (2.4).$$

其中c为域D的体积的倒数. 以上各式都可用来寻求Bergman核函数的显表达式. 华罗庚首先用(2.4)求出了四大类对称典型域的Bergman核函数的显表达式[02], 这种方法被称为华罗庚方法.

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 15 页 共 72 页
返回
全屏显示
关闭
退出

- 对于一般的蛋型域

$$E(p_1,\dots,p_n)=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n:|z_1|^{2p_1}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<1\},$$

这里$p_1,\dots,p_n$都是正实数. 而且$z_j(j=1,\dots,n)$都是复数. 更广泛的情形是每一个z_j都是复向量的情况, 即$z_j=(z_{j1},\dots,z_{jm_j})$ 而$|z_j|^{2p_j}=[\sum_{k=j1}^{jm_j}|z_{jk}|^2]^{p_j}$. 这种更一般的域记为$E(p_1,\dots,p_n;m_1,\dots,m_n)$ 或简记为$E_{p;m}$. 由于这两种域都是包含原点为中心的Reinhardt域. 而$\mathbb{C}^n$中的这种包含原点为中心的Reinhardt域(记为D)的完备标准正交函数系为

$$\{\frac{z_1^{j_1}z_2^{j_2}\dots z_n^{j_n}}{||z_1^{j_1}z_2^{j_2}\dots z_n^{j_n}||}\},j_1,\dots,j_n=0,1,2,\dots$$

其中

$$||z_1^{j_1}z_2^{j_2}\dots z_n^{j_n}||=[\int_D|z_1^{j_1}z_2^{j_2}\dots z_n^{j_n}|^2dV]^{1/2}.$$

只要求出上式的值, 由(2.1)式便得到D的Bergman 核函数的显表达式, 若其和函数能求出来并用初等函数来表示则更好了. 这种求Bergman核函数的方法称为级数法. 对蛋型域都是用级数法来求其Bergman核函数.

- 除此之外, 还发现了3个原理[28], 可从已知域的Bergman核函数的显表达式得到新的域的显表达式.

- 紧缩原理(Deflation principle): 设Ω是$\mathbb{C}^n$中由不等式$\phi(z) < 1$所界定的域, 这里$\phi(z)$ 是在Ω 的闭包的某一邻域连续的非负函数. 令K_1表示C_{n+2} 中的域Ω_1 的Bergman核函数, Ω_1 由不等式$\phi(z) + |\zeta_1|^{2/p} + |\zeta_2|^{2/q} < 1$ 所界定, p 与q 都是正实数. 令K_2表示$\mathbb{C}^{n+1}$中由不等式$\phi(z) + |\zeta|^{2/(p+q)} < 1$ 所界定的域Ω_2的Bergman核函数. 则下述等式就称为紧缩原理:

$$\pi K_2(z, 0; w, 0) = \frac{\pi^2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} K_1(z, 0, 0; w, 0, 0)$$

- 折迭原理(Folding principle): 折迭原理就是参考文献[29]中的关于Bergman核函数在逆紧映照下的变换公式:

  设G与D都是$\mathbb{C}^n$中的有界域, $F : G \longrightarrow D$是映G为D的阶为m的逆紧映照. 令$u := det F'$, 令$\Phi_1, \ldots, \Phi_m$表示定义于$D - V$上的F 的m个局部的逆映照, 这里$V := \{F(z) : z \in G, u(z) = 0\}$. 再令$U_k := det\Phi_k'$.则G的Bergman核K_G与D的Bergman核K_D的变换公式为:

$$\sum_{k=1}^{m} K_G(z, \Phi_k(w))\overline{U_k(w)} = u(z)K_D(F(z), w), z \in G, w \in D - V.$$

- 膨胀原理(Inflation principle): 设D 是$\mathbb{C}^{n+1}$ 中的有界完备Hartogs 域，由不等式$|\zeta|^2 < \phi(z)$ 所界定，这里$\zeta \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n$, 而$\phi(z)$ 在$\mathbb{C}^n$ 中的某一个有界域的内部是有界的正的和连续的函数: G 是$\mathbb{C}^{n+m}$ 中的由不等式$|Z|^2 < \phi(z)$ 所界定的域, 这里$Z = (Z_1, \ldots, Z_m), |Z|^2 = |Z_1|^2 + \cdots + |Z_m|^2$. 由于存在函数$L(z, w, s)$, 使得$D$ 的Bergman 核函数$K_D(z, \zeta; w, \eta)$ 能表为$L(z, w, \zeta\overline{\eta})$, 因而域$G$ 的Bergman 核函数$K_G(z, Z; w, W)$ 能由下列关系式给出：

$$K_G(z, Z; w, W) = \pi^{-(m-1)}[\partial^{m-1}L(z, w, s)/\partial s^{m-1}]_{s=<Z,W>}, \qquad (2.6)$$

  这里$< Z, W >= Z_1\overline{W_1} + \cdots + Z_m\overline{W_m}$.

- 极限方法：设D 是有界域, $D_m \subset D$是一系列的域, $D_j \subset D_{j+1}$, 而且$lim D_m = D$, 设$K_m(z, w), K(z, w)$ 分别是D_m, D的Bergman核函数, 则有$lim K_m(z, w) = K(z, w)$[73].

- 4.1. Cartan-Hartogs域的Bergman核函数

  四类Cartan-Hartogs域既不是齐性域也不是Reinhardt域. 因而不能用华罗庚方法或级数方法去求其Bergman核函数. 需要新的方法. 这种新的方法既要华罗庚方法中的域的全纯自同构群, 又要级数方法中的域的完备正交函数系. 现在以第一类Cartan-Hartogs域$Y_I(N,m,n;K)$ 为例来说明这种新的方法[05]. 而由膨胀原理, 只要算得$Y_I(1,m,n;K)$ 的Bergman核函数就可以知道域$Y_I(N,m,n;K)$ 的Bergman核函数.

- 4.1.1. 首先, 殷慰萍构造了域$Y_I(1,m,n;K)$的把内点(W,Z_0) 变为点$(W^*,0)$ 的全纯自同构变换:

$$\begin{cases} W^* &= e^{i\theta} W det(I-Z_0\overline{Z}_0^t)^{1/(2K)} det(I-Z\overline{Z}_0^t)^{-1/K}, \\ Z^* &= A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}_0^t Z)^{-1} D^{-1}. \end{cases}$$

  这里$\overline{A}^t A=(I-Z_0\overline{Z}_0^t)^{-1}, \overline{D}^t D=(I-\overline{Z}_0^t Z_0)^{-1}, Z_0\in R_I(m,n), i=(-1)^{1/2}$. 这种变换的集合记为$Aut(Y_I)$.

- 令$(W^*,Z^*) = f(W,Z) \in Aut(Y_I)$, $K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$ 为$Y_I(1,m,n;K)$的Bergman 核函数, 则由(2.3), 有

$$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K_I(W^*,0;\overline{W^*},0)(|det(J_f)|^2|_{Z_0=Z}. \qquad (2.7).$$

容易计算出

$$|det(J_f)|^2_{Z_0=Z} = det(I - Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+1/K)}. \qquad (2.8)$$

由此可知, 若能计算出$K_I(W^*,0;\overline{W^*},0)$, 那么$Y_I(1,m,n;K)$的Bergman 核函数$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$ 就求出来了. 为此就需要半Reinhardt域的概念.

- 4.1.2. 殷慰萍又发现这种Cartan-Hartogs域对变量W 具有Reinhardt域的性质, 而对变量Z具有圆型域的性质, 由此引进了半Reinhardt域(semi-Reinhardt domain)的概念并求出了它的完备标准正交系.

设D是$\mathbb{C}^{m+n}$ 中的包含原点的单连通有界域, 假如它的全纯自同构群包含下列变换:

$$\begin{cases} w_j^* &= e^{\sqrt{-1}\theta_j}w_j, \quad j = 1,2,\ldots\ldots,m; \\ z_k^* &= e^{\sqrt{-1}\theta}z_k, \quad k = 1,2,\ldots\ldots,n, \end{cases}$$

则称D 为半Reinhardt域. 显然半Reinhardt域为圆型域, 反之不然.

- 关键之点在于半Reinhardt域D的完备标准正交系可以求出来, 它具有如下形式:

$$\{w_1^{j_1}\dots w_m^{j_m}P_{ki}^{(j)}(z)\}$$

$$(j_1,\dots\dots,j_m,k=0,1,2,\dots;i=1,2,\dots,m_k;$$

$$m_k=(n+k-1)![k!(n-1)!]^{-1}).$$

这里$P_{ki}^{(j)}$ 是变量$z_1,\cdots,z_n$, 的k次齐次多项式, 对任意固定的k,j, 则多项式$P_{k1}^{(j)},P_{k2}^{(j)},\cdots,P_{km_k}^{(j)}$ 是线性无关的.

- 4.1.3. 下一步是计算$K_I(W^*,0;\overline{W^*},0)$. 为方便起见, 用$W$代替$W^*$. 由于$Y_I(1,m,n;K)$ 是semi-Reinhardt 域, 故$Y_I(1,m,n;K)$ 的标准完备正交函数系是$\{W^jP_{ki}^{(j)}(Z)\}=\{\Phi_{jki}\}(j,k=0,1,2,\dots\dots;i=1,2,\dots,m_k;m_k=(mn+k-1)![k!(mn-1)!]^{-1})$. 根据Bergman核函数的定义, 得到

$$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z})=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(Z)|^2.$$

因此

$$\begin{aligned}K_I(W,0;\overline{W},0)&=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(0)|^2=\sum|W^jP_{01}^{(j)}(0)|^2\\&=\sum|A_jW^j|^2=\sum|A_j|^2|W|^{2j}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

- 由于$A_jW^j = \Phi_{j01}(j = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$ 是$Y_I(1, m, n; K)$ 的标准完备正交函数系的一部分, 因而

$$A_j = [\int_{Y_I} |W|^{2j} dV]^{-1/2} = [\int_{Y_I} |W|^{2j} dW dZ]^{-1/2}.$$

而

$$\int_{Y_I} |W|^{2j} dW dZ = \int_{|W|<R} |W|^{2j} dW dZ = \int_0^{2\pi} d\theta [\int_{R_I(m,n)} \int_0^R R^{2j+1} dR dZ].$$

这里$R = det(I - ZZ^T)^{1/(2K)}$. 因而有

$$\int_{Y_I} |W|^{2j} dW dZ = \pi(j+1)^{-1} \int_{R_I(m,n)} det(I - ZZ^T)^{(j+1)/K} dZ.$$

令$\lambda = (j+1)/K$, 则有

$$\int_{R_I(m,n)} det(I - ZZ^T)^{(j+1)/K} dZ = \int_{R_I(m,n)} det(I - ZZ^T)^{\lambda} dZ.$$

这个积分华罗庚在半个世纪前已经计算出来了[02, P.28]. 它等于

$$J_{m,n}(\lambda) = \pi^{mn} \Pi_{i=1}^{n} \Gamma(\lambda + i) \Pi_{k=1}^{m} \Gamma(\lambda + k) / [\Pi_{h=1}^{n+m} \Gamma(\lambda + h)].$$

- 这样就求出(2.9)式中的$|A_j|^2$, 即有

$$|A_j|^2 = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}P(j),$$

其中

$$P(j) = (j+1)[(j+1+Kn)(j+1+K(n-1))\dots(j+1+K)]$$

$$[(j+1+K(n+1))(j+1+Kn)\dots(j+1+2K)]$$

$$[(j+1+K(n+2))(j+1+K(n+1))\dots(j+1+3K)]\dots$$

$$[(j+1+K(n+m-1))(j+1+K(n+m-2))\dots(j+1+mK)].$$

它是j的$mn+1$多项式. 因此,

$$K_I(W,0;\overline{W},0) = \sum_{j=0}^{\infty} K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}P(j)|W|^{2j}.$$

为了求出上述无穷级数的和, 把$P(j)$ 改写为

$$P(j) = \sum_{i=0}^{mn+1} a_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1).$$

- 那么, 易见$a_0 = P(-1) = 0$. 而其余的$a_i (i = 1, 2, \cdots, mn+1)$ 由以下递推公式决定:

$$a_i = \frac{P(-i-1) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k (-1)^k \Gamma(i+1)/\Gamma(i-k+1)}{(-1)^i \Gamma(i+1)}.$$

- 最近, 张利友证明了上式可以改写如下:

$$a_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j P(-j-1)}{\Gamma(i-j+1)\Gamma(j+1)}.$$

由此得到

$$K_I(W, 0; \overline{W}, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} |A_j|^2 |W|^{2j}$$

$$= K^{-mn} \pi^{-(mn+1)} \sum_{i=0}^{mn+1} a_i \Gamma(i+1)(1-|W|^2)^{-(i+1)}.$$

- 将W 仍改为W^*, 注意到$a_0 = 0$, 则有

$$K_I(W^*, 0; \overline{W^*}, 0) = K^{-mn} \pi^{-(mn+1)} \sum_{i=1}^{mn+1} a_i \Gamma(i+1)(1-|W^*|^2)^{-(i+1)}. \tag{2.10}$$

- 而W^* 是W 在变换$f(W,Z)$ 下的像并令$Z_0 = Z$ 者．这样便有

$$|W^*|^2 = X = X(W,Z) = |W|^2[det(I - ZZ^T)]^{-1/K}. \qquad (2.11)$$

并令

$$Y = (1-X)^{-1}, F(Y) = \sum_{i=1}^{mn+1} a_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}. \qquad (2.12)$$

得到

$$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}F(Y)det(I-ZZ^T)^{-(m+n+1/K)}. \qquad (2.13)$$

- 应用膨胀原理, 就得到域$Y_I(N,m,n;K)$的Bergman核函数为

$$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-mn}\pi^{-(mn+N)}G(Y)det(I-ZZ^T)^{-(m+n+N/K)}. \qquad (2.14)$$

这里$G(Y) = \sum_{i=1}^{mn+1} a_i\Gamma(N+i)Y^{N+i}$, a_i 同上, $Y = (1-X)^{-1}$, $X = |W|^2[det(I-ZZ^T)]^{-1/K}$, $|W|^2 = \sum_{j=1}^{N}|W_j|^2$. 在$K_I(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$ 中令$K=1$, 就得到$Y_I(N,m,n;1)$的Bergman核函数的显表达式.

- 4.2. 用上述类似的思想和方法可以对其余的Cartan-Hartogs域以及Cartan-egg域, Hua域, 广义Hua域, Hua结构求出其Bergman 核函数的显表达式, 参阅上面指出的文献[04-25], 这里不再赘述.
- 虽然思想和方法类似, 但是还需要很多计算上的技巧. 特别是计算相应的$K_I(W,0;\overline{W},0) = \sum_{j=0}^{\infty}|A_j|^2|W|^{2j}$时, 这个无穷级数的和函数是否能够求出是很有技巧性的. 到目前为止, 华罗庚域的定义中的$p_j(j=1,2,\ldots,r)$若有两个不同的p_j其倒数都不是正整数时, 相应的无穷级数的和函数就求不出来.
- 由于华罗庚域的Bergman核函数的显式已经求出, 这就使得这个领域还有许多可发展的后续研究可做, 例如,可以考虑华罗庚域的Bergman核函数的零点问题, 即什么时候华罗庚域是陆启铿域, 什么条件下不是陆启铿域等等.
- 例如最近殷慰萍利用Bergman核函数的显表达式证明了$Y_I(1,1,1;K)$是陆启铿域, 从而根据Bergman核函数在双全纯映照下的变换规律和Bedford和Pinchuk的一个定理[72], 也证明了若$D \subset \mathbf{C}^2$ 是具有实解析边界的拟凸域, 而且其全纯自同构群不紧致, 则D一定是陆启铿域.

- 由上面的定义可知, 华罗庚结构是殷慰萍构建的域中最为一般的, 也就是说其余的域都是华罗庚结构的特殊情况.
- 在华罗庚结构的定义中的域$D \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}$, 也就是说$D$ 是对称典型域. 现在提出一个尚未解决的问题:
- **Open Problem 1: 华罗庚结构的定义中的域D是任意的有界非对称齐性域时, 相应的域的Bergman核函数能否求出其显表达式?**

Institute of Structural Mechanics

5 华罗庚域的经典度量的等价

- $\mathbb{C}^n$中有界域D上的经典度量是指Bergman度量, Kobayashi度量, Carathéodory度量和Einstein-Kähler度量. 分别用$\omega_B(D), \omega_C(D), \omega_K(D), \omega_{EK}(D)$表示. 研究它们之间的关系是一个重要的问题. 最近刘克峰, 孙晓峰, 丘成桐研究了Teichmüller空间和模空间的经典度量的等价问题[30-32], 证明了在这两个空间中的四个经典度量是等价的, 特别是证明了Bergman度量和Einstein-Kähler度量在这两个空间上是等价的丘成桐猜想.
- 殷慰萍他们研究了经典度量在华罗庚域上的等价问题. 证明了Bergman度量和Einstein-Kähler度量在Cartan-Hartogs域是等价的,
- 仍然以第一类Cartan-Hartogs域$Y_I(N, m, n; K) := Y_I$为例进行阐述. 其主要思想和方法是: 首先引进了一种新的不变完备度量, 证明这些度量与Y_I的Bergman度量等价; 然后证明这些新的完备度量的Ricci曲率和全纯截曲率都有负的上下界, 从而利用丘成桐的Schwarz引理[33, 34]证明这些新的完备度量与Einstein-Kähler度量等价, 这样借助于新的完备度量为过渡就得到Bergman度量和Einstein-Kähler度量是等价的证明. 这些思想和方法是从文献[30-32]得到启迪而获得的.

• 5.1. Y_I的新不变完备度量

设$(Z,W) \in Y_I$,把$Z = (z_{ij})$中的元素z_{ij}按行向量的次序排成一个具有mn个元素的向量Z_1,即

$$Z_1 = (z_1, z_2, \ldots, z_{mn}) = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n}, \ldots, z_{m1}, z_{m2}, \ldots, z_{mn}),$$

把W的元素排为$(w_1, w_2, \ldots, w_N)$令

$$Z_2 = (z_{mn+1}, z_{mn+2}, \ldots, z_{mn+N}) = (w_1, w_2, \ldots, w_N),$$

则Y_I中的点(Z,W)可以表示成具有$mn+N$个元素的向量

$$z = (Z_1, Z_2) = (z_1, z_2, \ldots, z_{mn}, z_{mn+1}, z_{mn+2}, \ldots, z_{mn+N}).$$

令

$$G_\lambda = G_\lambda(Z,W) = Y^\lambda[\det(I - Z\overline{Z}^t)]^{-(m+n+\frac{N}{K})}, \lambda > 0.$$

我们要证明由它能生成新的度量, 其关键是要证明由它生成的方阵

$$T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W}) = \left(\frac{\partial^2 \log G_\lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)$$

是定正的, 其中$Y = (1-X)^{-1}, X = |W|^2[\det(I - Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}}$.

陆启铿猜想的历史回顾
Bergman核函数及陆...
陆启铿问题的研究概况
第一类Cartan-...
访问主页
标题页
返回
全屏显示
关闭
退出

一般定正性的证明并不容易. 我们的方法是把它复相合变换为对角的形式. 取$f \in \mathrm{Aut}(Y_I)$, 并令$Z_0 = Z$则有

$$T_{\lambda I}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W}) = J_f|_{Z_0=Z} T_{\lambda I}(0, W^*; 0, \overline{W^*}) \overline{J}_f^t|_{Z_0=Z},$$

其中J_f是变换f的Jacobian矩阵.
经计算, 有

$$T_{\lambda I}(0, W^*; 0, \overline{W^*}) = \begin{pmatrix} (\frac{\lambda}{K} YX + m + n + \frac{N}{K})I & 0 \\ 0 & \lambda Y I + \lambda Y^2 \overline{W^*}^t W^* \end{pmatrix}.$$

这样就容易证明$T_{\lambda I}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W}) > 0$. 再结合$G_\lambda$的表达式, 可知由$G_\lambda$生成的度量是域$Y_I$的不变Kähler度量, 把它记为$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$. 其数量连续依赖于$\lambda$, 故有连续统那么多.

- **5.2. Y_I的新度量与Bergman度量等价**

定 义 ：$\mathbb{C}^n$中 的 域Ω的 两 个 度 量$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{E}$等 价, 是 指 存 在 两 个 正 常 数a和b(设$a \le b$) 使得下列不等式成立:

$$a \le \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}} \le b.$$

Y_I的Bergman核函数见(2.14), 它生成的Bergman度量记为$\omega_B(Y_I)$, 则

$$(\omega_B(Y_I))^2 = dzJ_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix} [\frac{1}{K}M'X+m+n+\frac{N}{K}]I & 0 \\ 0 & M'I+M''\overline{W^*}^tW^* \end{pmatrix}\overline{J_f}^t|_{Z_0=Z}\overline{dz}^t.$$

由上节可知

$$(\omega_{G_\lambda}(Y_I))^2 = dzJ_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix} [\frac{1}{K}\lambda YX+m+n+\frac{N}{K}]I & 0 \\ 0 & \lambda YI+\lambda Y^2\overline{W^*}^tW^* \end{pmatrix}\overline{J_f}^t|_{Z_0=Z}\overline{dz}^t.$$

把$dzJ_f|_{Z_0=Z}$表示为$(d\tilde{z}, d\Im)$, 而$d\tilde{z}$和$d\Im$分别为$1\times mn$和$1\times N$矩阵, 则
$(\omega_{G_\lambda}(Y_I))^2 = (\frac{\lambda YX}{K}+m+n+\frac{N}{K})|d\tilde{z}|^2 + d\Im(\lambda YI+\lambda Y^2\overline{W^*}^tW^*)\overline{d\Im}^t$,
$(\omega_B(Y_I))^2 = (\frac{1}{K}M'X+m+n+\frac{N}{K})|d\tilde{z}|^2 + d\Im(M'I+M''\overline{W^*}^tW^*)\overline{d\Im}^t$.
其中

$$M' = \frac{dG(Y)}{dX}, M'' = \frac{d^2G(Y)}{dX^2}.$$

而$G(Y)$就是(2.14)中的$G(Y)$.

- 由[35] 可知向量$W^* = (w_1^*, w_2^*, \cdots, w_N^*)$ 能表示为

$$W^* = e^{i\theta}(\mu, 0, \cdots, 0)U, \quad \mu \geqslant 0, \Longrightarrow W^*\overline{W}^* = \mu^2 = X.$$

这里U 为N阶酉方阵, 因而

$$M'I^{(N)} + M''\overline{W}^{*t}W^* = \overline{U}^t \begin{pmatrix} M' + M''X & 0 \\ 0 & M'I^{(N-1)} \end{pmatrix} U,$$

$$\lambda Y I^{(N)} + \lambda Y^2 \overline{W^*}^t W^* = \overline{U}^t \begin{pmatrix} \lambda Y + \lambda Y^2 X & 0 \\ 0 & \lambda Y I^{(N-1)} \end{pmatrix} U > 0.$$

令$d\Im\overline{U}^t = (dv, d\tilde{W})$, 而$dv$和$d\tilde{W}$分别为$1\times 1$和$1\times(N-1)$矩阵, 则有:

$$\begin{aligned} (\omega_{G_\lambda}(Y_I))^2 &= \left(\frac{\lambda Y X}{K} + m + n + \frac{N}{K}\right)|d\tilde{z}|^2 + (\lambda Y + \lambda Y^2 X)|dv|^2 + \lambda Y|d\tilde{W}|^2, \\ (\omega_B(Y_I))^2 &= \left(\frac{1}{K}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)|d\tilde{z}|^2 + (M' + M''X)|dv|^2 + M'|d\tilde{W}|^2. \end{aligned}$$

由于$T_{\lambda I}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W})$ 和$T_{BI}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W})$都是定正矩阵, 这表明

$$\frac{1}{K}M'X + m + n + \frac{N}{K} > 0, \quad M' + M''\mu^2 > 0, \quad M' > 0, \quad Y > 0.$$

- 令

$$\Phi(X)=\frac{\frac{1}{K}M'X+m+n+\frac{N}{K}}{\frac{\lambda YX}{K}+m+n+\frac{N}{K}},\quad \Psi(X)=\frac{M'+M''\mu^2}{\lambda Y+\lambda Y^2\mu^2},\quad \Upsilon(X)=\frac{M'}{\lambda Y},$$

则$\Phi(X),\Psi(X)$ 和$\Upsilon(X)$ 都是在区间$[0,1)$上连续的X的正值函数, 假如极限

$$\lim_{X\to1}\Phi(X),\quad \lim_{X\to1}\Psi(X),\quad \lim_{X\to1}\Upsilon(X)$$

都存在而且都是正数, 则$\Phi(X),\Psi(X),\Upsilon(X)$ 在区间$[0,1)$上都有正的最大值和最小值.

经计算易知

$$\lim_{X\to1}\Phi(X)=\lim_{Y\to\infty}\Phi(X)=\frac{mn+N+1}{\lambda}.$$

$$\lim_{X\to1}\Psi(X)=\lim_{Y\to\infty}\Psi(X)=\frac{mn+N+1}{\lambda}.$$

以及

$$\lim_{X\to1}\Upsilon(X)=\lim_{Y\to\infty}\Upsilon(X)=\frac{mn+N+1}{\lambda}.$$

因此存在正常数$\nu,\delta,\zeta,\eta,\rho$ 和ϱ 使得

$$0<\nu\leqslant\Phi(X)\leqslant\delta,0<\zeta\leqslant\Psi(X)\leqslant\eta,0<\rho\leqslant\Upsilon(X)\leqslant\varrho.$$

- 令$a^2=\max\{\delta,\eta,\varrho\}$ 和$b^2=\min\{\nu,\zeta,\rho\}$, 则有$0<b\leqslant\frac{\omega_B(Y_I)}{\omega_{G_\lambda}(Y_I)}\leqslant a$. 这样就证明了
- 定理：Y_I的Bergman度量和引进的新度量等价, 即$\omega_B(Y_I)\sim\omega_{G_\lambda}(Y_I)$.
- 由于Bergman度量$\omega_B(Y_I)$是完备的([36]), 因此新度量$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$也是完备的.
- 用同样的思想和方法, 对$Y_{II}(N,p;K),Y_{III}(N,q;K),Y_{IV}(N,n;K)$分别引进下述函数

$$G_\lambda=Y^\lambda[\det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-(p+1+\frac{N}{K})},\lambda>0;$$

$$(Y=(1-X)^{-1},X=|W|^2[\det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}},(Z,W)\in Y_{II})$$

$$G_\lambda=Y^\lambda[\det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-(q-1+\frac{N}{K})},\lambda>0;$$

$$(Y=(1-X)^{-1},X=|W|^2[\det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}},(Z,W)\in Y_{III})$$

$$G_\lambda=Y^\lambda\beta(Z,\overline{Z})^{-(n+\frac{N}{K})},\lambda>0;$$

$$(Y=(1-X)^{-1},X=|W|^2[\beta(Z,\overline{Z})]^{-\frac{1}{K}},\beta(Z,\overline{Z})=1+|ZZ^t|^2-2Z\overline{Z}^t,(Z,W)\in Y_{IV})$$

则这些函数分别生成$Y_{II}(N,p;K),Y_{III}(N,q;K),Y_{IV}(N,n;K)$的不变完备度量, 并分别等价于这些域的Bergman度量.

- **5.3. Y_I的新不变完备度量的Ricci曲率**

我们要证明域Y_I在新的完备不变度量下的Ricci曲率有负的上下界. Y_I的不变度量$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$的Ricci曲率$Ric_{\lambda I}$按定义有

$$Ric_{\lambda I} = -\frac{dz\left(\frac{\partial^2 \log[\det T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})]}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)\overline{dz}^t}{dz T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})\overline{dz}^t}.$$

令

$$G_I(X) = \left(\frac{\lambda Y}{K} + m + n + \frac{N-\lambda}{K}\right)^{mn} \lambda^N Y^{N+1},$$

经计算有

$$\det T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W}) = G_I(X)[\det(I - Z\overline{Z}^t)]^{-(m+n+\frac{N}{K})}.$$

$$dz\left(\frac{\partial^2 \log[\det T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})]}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)\overline{dz}^t := (\omega_{det}(Y_I))^2$$

$$= dz J_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix} [\frac{1}{K}M_I'X + m + n + \frac{N}{K}]I & 0 \\ 0 & M_I'I + M_I''\overline{W^*}^t W^* \end{pmatrix}\overline{J_f}^t|_{Z_0=Z}\overline{dz}^t.$$

这里

$$\log G_I(X) = M_I, \quad \frac{\partial \log G_I(X)}{\partial X} = M_I', \quad \frac{\partial^2 \log G_I(X)}{\partial X^2} = M_I''.$$

Institute of Structural Mechanics

可以证明
$$\left(\frac{\partial^2\log[\det T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})]}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\right)>0.$$
把$dzJ_f|_{Z_0=Z}$表示为$(d\tilde{z},d\Im)$, 得到
$$\begin{aligned}(\omega_{G_\lambda}(Y_I))^2&=(\tfrac{\lambda YX}{K}+m+n+\tfrac{N}{K})|d\tilde{z}|^2+(\lambda Y+\lambda Y^2\mu^2)|dv|^2+\lambda Y|d\tilde{W}|^2,\\(\omega_{\det}(Y_I))^2&=(\tfrac{1}{K}M_I'X+m+n+\tfrac{N}{K})|d\tilde{z}|^2+(M_I'+M_I''\mu^2)|dv|^2+M_I'|d\tilde{W}|^2.\end{aligned}$$
由于$T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})$ 和$(\frac{\partial^2\log[\det T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})]}{\partial z_i\partial\overline{z}_j})$ 都是定正矩阵, 这表明
$$\frac{1}{K}M_I'X+m+n+\frac{N}{K}>0,\quad M_I'+M_I''\mu^2>0,\quad M_I'>0,\quad Y>0.$$
令
$$\Phi_I(X)=\frac{\frac{1}{K}M_I'X+m+n+\frac{N}{K}}{\frac{\lambda YX}{K}+m+n+\frac{N}{K}},\quad\Psi_I(X)=\frac{M_I'+M_I''\mu^2}{\lambda Y+\lambda Y^2\mu^2},\quad\Upsilon_I(X)=\frac{M_I'}{\lambda Y},$$
则$\Phi_I(X),\Psi_I(X)$ 和$\Upsilon_I(X)$ 都是在区间$[0,1)$上连续的X的正值函数, 假如极限
$$\lim_{X\to1}\Phi_I(X),\quad\lim_{X\to1}\Psi_I(X),\quad\lim_{X\to1}\Upsilon_I(X)$$
都存在而且都是正数, 则$\Phi_I(X),\Psi_I(X),\Upsilon_I(X)$ 在区间$[0,1)$上都有正的最大值和最小值.

容易算出当X 趋向于1时, $\Phi_I(X), \Psi_I(X)$ 和$\Upsilon_I(X)$的极限:

$$\lim_{X\to 1} \Phi_I(X) = \lim_{Y\to\infty} \Phi_I(X) = \frac{mn+N+1}{\lambda},$$

$$\lim_{X\to 1} \Psi_I(X) = \lim_{Y\to\infty} \Psi_I(X) = \frac{mn+N+1}{\lambda},$$

$$\lim_{X\to 1} \Upsilon_I(X) = \lim_{Y\to\infty} \Upsilon_I(X) = \frac{mn+N+1}{\lambda}.$$

因此存在正常数$\nu, \delta, \zeta, \eta, \rho$ 和ϱ 使得

$$0 < \nu \leqslant \Phi(X) \leqslant \delta, 0 < \zeta \leqslant \Psi(X) \leqslant \eta, 0 < \rho \leqslant \Upsilon(X) \leqslant \varrho.$$

令$a^2 = \max\{\delta,\ \eta,\ \varrho\}$ 和$b^2 = \min\{\nu,\ \zeta,\ \rho\}$, 则有

$$0 < b \leqslant \frac{\omega_{det}(Y_I)}{\omega_{G_\lambda}(Y_I)} \leqslant a.$$

至此证明了下述定理.

定理：Y_I的度量$\omega_\lambda(Y_I)$的Ricci曲率有负的上下界, 即

$$-a \leqslant Ric_{\lambda I} = -\frac{\omega_{det}(Y_I)}{\omega_{G_\lambda}(Y_I)} \leqslant -b.$$

对其余的Cartan-Hartogs 域也有类似的结果.

Institute of Structural Mechanics

- **5.4. Y_I 新不变完备度量的全纯截曲率**

我们要证明域Y_I在新完备不变度量下的全纯截曲率有负的上下界.
Y_I的不变度量$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$的全纯截曲率$\omega_{\lambda I}(z,dz)$按定义有

$$\omega_{\lambda I}(z,dz)=\frac{dz(-\overline{\partial}\partial T+dTT^{-1}\overline{dT}^t)\overline{dz}^t}{(dzT\overline{dz}^t)^2},$$

这里的$T=T_{\lambda I}(Z,W;\overline{Z},\overline{W})$, 全纯截曲率在全纯自同构变换下是不变的，对任意$(Z,W)\in Y_I$，存在$f\in \mathrm{Aut}(Y_I)$，使得$f(Z,W)=(0,W^*)$. 所以，只须计算$\omega_{\lambda I}(z,dz)$在$(0,W^*)$点的值即可. 为方便, 下面的计算中以$W$代$W^*$. 并且当$Z^*=0$时, 有$|W^*|^2=X$.
令

$$\omega_{\lambda I}(z,dz)|_{Z=0}=\frac{\Omega_1}{\Omega_2}.$$

经过复杂的计算得到

$$\Omega_1=P_1|W\overline{dW}^t|^4+P_{12}|W\overline{dW}^t|^2|dW|^2+P_2|dW|^4+Q_1|dW|^2|dZ_1|^2$$
$$+Q_2|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2+R|dZ_1|^4-2K^{-1}(\lambda Y+M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t),$$

以及

$$\Omega_2=[K^{-1}(\lambda Y+M_1)|dZ_1|^2+\lambda Y|dW|^2+\lambda Y^2|W\overline{dW}^t|^2)]^2.$$

其中

$$P_1 = \frac{1}{M'}[M'''(XM''' + 4M'') - (XM'' + M')^{-1}M''(XM''' + 2M'')^2] - M^{(4)}$$

$$= -2\lambda Y^4, \quad P_{12} = 4[(M'')^2(M')^{-1} - M'''] = -4\lambda Y^3,$$

$$P_2 = -2M'' = -2\lambda Y^2, \quad Q_1 = -\frac{4}{K}(XM'' + M') = -\frac{4\lambda Y^2}{K},$$

$$Q_2 = 4[\frac{1}{K^2}(XM'' + M')^2(\frac{1}{K}M'X + m + n + \frac{N}{K})^{-1} - \frac{1}{K}(XM''' + 2M'')]$$

$$= \frac{4}{K}\lambda^2 Y^4(\lambda Y + M_1)^{-1} - \frac{8}{K}\lambda Y^3,$$

$$R = -\frac{2}{K^2}(XM'' + M')X = -\frac{2}{K^2}\lambda(Y^2 - Y).$$

其中

$$M = \log Y^\lambda, \; \frac{dM}{dX} = M' = \lambda Y, \frac{d^2M}{dX^2} = M'' = \lambda Y^2.$$

$$M''' = 2\lambda Y^3, \; M^{(4)} = 6\lambda Y^4, M_1 = (m+n)K + N - \lambda.$$

- 5.4.1. 全纯截曲率的下界的估计

把Ω_1与Ω_2中的同类项的系数之比书写为函数, 则有:

$$\Phi_1=\frac{P_1}{\lambda^2Y^4}=-\frac{2}{\lambda},\quad \Phi_2=\frac{P_{12}}{2\lambda^2Y^3}=-\frac{2}{\lambda},\quad \Phi_3=\frac{P_2}{\lambda^2Y^2}=-\frac{2}{\lambda},$$

$$\Phi_4=\frac{Q_1}{2K^{-1}\lambda Y(\lambda Y+M_1)}=-\frac{2Y}{\lambda Y+M_1},\quad \Phi_5=\frac{Q_2}{2K^{-1}(\lambda Y+M_1)\lambda Y^2},$$

而令

$$\Phi_6=\frac{R|dZ_1|^4-2K^{-1}(\lambda Y+M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t)}{K^{-2}(\lambda Y+M_1)^2|dZ_1|^4}.$$

由于

$$\Phi_5=-\frac{2Y(\lambda Y+2M_1)}{(\lambda Y+M_1)^2}\geqslant-\frac{2Y[\lambda Y+2(m+n)K+2N]}{(\lambda Y+M_1)^2}:=\Phi_{51}.$$

$$\Phi_6\geqslant\frac{R|dZ_1|^4-2K^{-1}(\lambda Y+M_1)|dZ_1|^4}{K^{-2}(\lambda Y+M_1)^2|dZ_1|^4}=\frac{-2\lambda(Y^2-Y)-2K(\lambda Y+M_1)}{(\lambda Y+M_1)^2}:=\Phi_{61}.$$

由于Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_{51}, Φ_{61} 是变量Y在区间$[1,\infty)$的取负值的连续函数, 而且易知当$Y\to\infty$时, 存在负的极限, 而且都是$-\frac{2}{\lambda}$. 因此它们的最小值(负值）都存在. 取其中的最小的记为$-a$. 则易知$\omega_{\lambda I}(z,dz)|_{Z=0}\geqslant -a$. 即全纯截曲率有负的下界.

Institute of Structural Mechanics

- 5.4.2. 全纯截曲率的上界的估计

全纯截曲率的表达式改写为$\omega_{\lambda I}(z,dz)|_{Z=0}=-C+\frac{\Omega_3}{\Omega_4}, C>0$. 其中

$$\Omega_3=P_1^*|W\overline{dW}^t|^4+P_{12}^*|W\overline{dW}^t|^2|dW|^2+P_2^*|dW|^4+Q_1^*|dW|^2|dZ_1|^2$$

$$+Q_2^*|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2+R^*|dZ_1|^4-2K^{-1}(\lambda Y+M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t),$$

$$\Omega_4=[K^{-1}(\lambda Y+M_1)|dZ_1|^2+\lambda Y|dW|^2+\lambda Y^2|W\overline{dW}^t|^2)]^2,$$

$$P_1^*=P_1+C\lambda^2Y^4=-\lambda Y^4(2-C\lambda),$$

$$P_{12}^*=P_{12}+2C\lambda^2Y^3=-2\lambda Y^3(2-C\lambda), P_2^*=P_2+C\lambda^2Y^2=-\lambda Y^2(2-C\lambda),$$

$$Q_1^*=Q_1+2CK^{-1}\lambda Y(\lambda Y+M_1)=-4K^{-1}\lambda Y^2+2CK^{-1}\lambda Y(\lambda Y+M_1),$$

$$Q_2^*=4K^{-1}\lambda^2Y^4(\lambda Y+M_1)^{-1}-8K^{-1}\lambda Y^3+2CK^{-1}\lambda Y^2(\lambda Y+M_1),$$

$$R^*=R+CK^{-2}(\lambda Y+M_1)^2=-2\lambda K^{-2}(Y^2-Y)+CK^{-2}(\lambda Y+M_1)^2.$$

若

$$P_1^*\leqslant 0,\quad P_{12}^*\leqslant 0,\quad P_2^*\leqslant 0,\quad Q_1^*|dW|^2|dZ_1|^2+Q_2^*|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2\leqslant 0,$$

$$R^*|dZ_1|^4-2K^{-1}(\lambda Y+M_1)tr(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t)\leqslant 0,$$

则

$$\omega_{\lambda I}(z,dz)|_{Z=0}\leqslant -C.$$

Institute of Structural Mechanics

易知, 若$C \leqslant \frac{2}{\lambda}$, 则$P_1^* \leqslant 0,\ P_{12}^* \leqslant 0,\ P_2^* \leqslant 0$.
因为$|W\overline{dW^t}|^2 \leqslant |W|^2|dW|^2 = X|dW|^2 = (1-Y^{-1})|dW|^2$, 同时若$C \leqslant \frac{2Y}{\lambda+M_1} := \Phi_{42}$ 则$Q_1^* \leqslant 0$, 这时就有

$$Q_1^*|dW|^2|dZ_1|^2 + Q_2^*|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2 \leqslant (Q_1^*X^{-1}+Q_2^*)|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2$$

由计算, 有

$$Q_1^*X^{-1}+Q_2^* = \frac{2C\lambda Y^3(\lambda Y+M_1)}{K(Y-1)} - \frac{4\lambda Y^3[\lambda(Y-1)^2+(M_1+\lambda)(2Y-1)]}{K(Y-1)(\lambda Y+M_1)}.$$

因此若

$$C \leqslant \frac{2[\lambda(Y-1)^2+(M_1+\lambda)(2Y-1)]}{(\lambda Y+M_1)^2} := \Phi_{52},$$

以及

$$C \leqslant \frac{2Y}{\lambda+M_1} := \Phi_{42},$$

则

$$Q_1^*|dW|^2|dZ_1|^2 + Q_2^*|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2 \leqslant 0.$$

这里$M_1 = (m+n)K+N-\lambda$, 由于

$$R^*|dZ_1|^4 - \frac{2(\lambda Y+M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t)}{K} \leqslant R^*|dZ_1|^4 - \frac{2(\lambda Y+M_1)}{mK}|dZ_1|^4.$$

由计算, 若

$$C \leqslant \frac{2[\lambda Y^2 + Km^{-1}(\lambda Y + M_1)]}{(\lambda Y + M_1)^2} := \Phi_{62},$$

则

$$R^*|dZ_1|^4 - 2K^{-1}(\lambda Y + M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t) \leqslant 0.$$

由于$\Phi_{42}, \Phi_{52}, \Phi_{62}$ 都是变量Y的在区间$[1, \infty)$ 连续的正值函数. 易见当$Y \to \infty$时, $\Phi_{42}, \Phi_{52}, \Phi_{62}$ 的极限都存在而且都等于$\frac{2}{\lambda}$. 这样$\Phi_{42}, \Phi_{52}, \Phi_{62}$ 在$[1, \infty)$ 都分别有正的最小值. 令b 是它们中最小的一个. 则若$C \leqslant b$ 就有

$$Q_1^*|dW|^2|dZ_1|^2 + Q_2^*|W\overline{dW}^t|^2|dZ_1|^2 \leqslant 0,$$

$$R^*|dZ_1|^4 - 2K^{-1}(\lambda Y + M_1)\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}^t dZ\overline{dZ}^t) \leqslant 0.$$

由上述叙述, 可知存在$C \leqslant \min\{b, \frac{2}{\lambda}\}$, 以及$C > 0$ 使得

$$\omega_{\lambda I}(z, dz) \leqslant -C.$$

这样便得到

- 定理: 存在仅与Y_I, λ 有关的正常数a, C, 使得Y_I在度量$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$下的全纯截曲率$\omega_{\lambda I}(z, dz)$ 满足$-a \leqslant \omega_{\lambda I}(z, dz) \leqslant -C$.

对其余的Cartan-Hartogs 域也有类似的定理.

Institute of Structural Mechanics
陆启铿猜想的历史回顾
Bergman核函数及陆...
陆启铿问题的研究概况
第一类Cartan-...
访问主页
标题页
第 43 页 共 72 页
返回
全屏显示
关闭
退出

- **5.5. Y_I 的Bergman度量与Einstein-Kähler度量等价**

面已经证明了第一类Cartan-Hartogs域的新的完备度量与Bergman度量等价, 由于新的完备度量的Ricci曲率和全纯截曲率都有负的上下界, 就可以利用丘成桐的Schwarz引理证明它也与Einstein-Kähler度量等价. 从而, Y_I的Bergman度量与Einstein-Kähler度量等价这一事实就得到了证明.

- 丘成桐的Schwarz引理[34, 33,p.117]: 设$f : (M^m, g) \to (N^n, h)$是Kähler流形间的全纯映射, 此处$M$ 是完备的而且其Ricci曲率是非正的，即$Ric(g) \geqslant -cg, c \geqslant 0$.

  (1) 若N的全纯截曲率有负的上界, 则$f^*h \leqslant cg$, 这里c是正常数.

  (2) 若$m = n$而且N的Ricci曲率存在负的上界, 则$f^*\omega_h^n \leqslant c\omega_g^n$, 此处$c$是正常数.

  其中, (2)中的ω_h^n 和ω_g^n 分别指度量h和g下N和M的体积元素.

考虑恒同映射

$$id : (Y_I, \omega_{EK}(Y_I)) \to (Y_I, \omega_{G_\lambda}(Y_I)),$$

由于$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$的全纯截曲率有负的上界, 则由上述的Schwarz引理的(1)得到

$$\omega_{G_\lambda}(Y_I) \leqslant C_1 \omega_{EK}(Y_I).$$

这里C_1是正常数. 再考虑恒同映射

$$id : (Y_I, \omega_{G_\lambda}(Y_I)) \to (Y_I, \omega_{EK}(Y_I)),$$

由于$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$的Ricci曲率有负的下界, 则由上述Schwarz引理(2)得到

$$\omega_{EK}^{mn+N}(Y_I) \leqslant C_0 \omega_{G_\lambda}^{mn+N}(Y_I),$$

这里C_0是正常数. 这是体积元素之间的不等式, 因此推得其相应的度量方阵的行列式有

$$\det[T_{EKI}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W})] \leqslant C_0 \det[T_{\lambda I}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W})].$$

而这些度量方阵都是定正的, 即$T_{\lambda I}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W}) > 0$, $T_{EKI}(Z, W; \overline{Z}, \overline{W}) > 0$. 由下述命题得到

$$\omega_{EK}(Y_I) \leqslant C_2 \omega_{G_\lambda}(Y_I).$$

命题: 设A和B都是N阶正定的Hermitian方阵, 而且存在正常数α,β使得$B \geqslant \alpha A$, $\det B \leqslant \beta \det A$ 成立. 则存在仅依赖于α, β, N的γ使得有$B \leqslant \gamma A$.

这命题容易用线性代数方法证明. 由上述两个度量不等式, 就证明了如下定理.

定理: Y_I的Bergman度量和Einstein-Kähler度量等价.

对其余的Cartan-Hartogs域, 也存在类似的定理.

若Y_I为凸域，则有([37,38])$\omega_C(Y_I) = \omega_K(Y_I)$，再由上述事实，则有$\omega_B(Y_I)$，$\omega_C(Y_I)$，$\omega_K(Y_I)$，$\omega_{EK}(Y_I)$，$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$彼此等价．苏简兵最近证明$Y_I(1, m, n; K)$为凸域的充要条件是$2K \geq m$.
由于$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$的全纯截曲率存在负的上界, 因此由[39, 40, p.136], 有

$$\omega_{G_\lambda}(Y_I) \leqslant \beta\omega_K(Y_I),$$

从而有

$$\omega_B(Y_I) \leqslant \beta_1\omega_K(Y_I)$$

以及

$$\omega_{EK}(Y_I) \leqslant \beta_2\omega_K(Y_I).$$

由于总有([41,42])$\omega_C(Y_I) \leqslant 2\omega_B(Y_I)$, 因而

$$\omega_C(Y_I) \leqslant \beta_3\omega_{EK}(Y_I).$$

这里β，β_1，β_2，β_3都是正常数.
上述事实对其余的Cartan-Hartogs域也成立.

- **Open Problem 2: 对于一般的华罗庚域的Bergman度量是否等价于Einstein-Kähler度量?**

6 华罗庚域的比较定理

殷慰萍, 王安等对Cartan-Hartogs域得到了Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理[43-46]. 后来在他们关于求解Cartan-Hartogs域的Einstein-Kähler度量的显表达式的论文中, 也能够得到关于Einstein-Kähler度量和Kobayashi度量的比较定理[45-49]. 这些比较定理实际上就属于上一节的经典度量的等价的范畴. 在论文[43-46]之中, 关键部分是需要对Bergman度量的全纯截曲率是否有负的上界进行估计. 而在[45-49]关于Einstein-Kähler度量和Kobayashi度量的比较定理关键之处是要证明Einstein-Kähler度量的全纯截曲率具有负的上界. 而且都是在Bergman度量和Einstein-Kähler度量的显表达式求出来的情况下进行的. 有了上一节的结果, 对于同样结果的证明不但简单而且可以不要求具体求出Einstein-Kähler度量的显表达式, 这就更进了一步. 上面提到Bergman度量是1922年由S.Bergman引进的[26], 把它记为$\mathcal{B}$. Carathéodory 在1926年引进了一个不变距离[52], Reiffen 在1963年引进了一个不变度量[53], 现在称之为Carathéodory度量, 记为$\mathcal{C}$, 也称为Carathéodory-Reiffen 度量. Kobayashi度量是由Kobayashi在1967年Royden在1970年引进的[54,55], 记之为$\mathcal{K}$. 根据H.Wu的论文[56], 上述经典度量之间有如下关系.

- 首先在单位超球B_n上对其上的任何切向量$\mathbf{V}$ 有

$$\sqrt{\mathcal{E}(\mathbf{V},\mathbf{V})}=\sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{V},\mathbf{V})}=\sqrt{n+1}\mathcal{C}(\mathbf{V})=\sqrt{n+1}\mathcal{K}(\mathbf{V})$$

- (i) $\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$: 对$\mathbb{C}^n$中的一般有界域总有$\mathcal{C}\leq\in\mathcal{B}$. 这个不等式隐含在陆启铿1958年的文章[41]中, 明显的和简化的证明则在1978年的K.T.Hahn文章[42]中.
- (ii) $\mathcal{B}$ 和d $\mathcal{K}$: 没有确定的关系. 人们希望对$\mathbb{C}^n$中的有界域成立关系式$\mathcal{B}\leq\alpha\mathcal{K}$ 这里α是常数. Diederich 和Fornæss 举出反例, 在$\mathbb{C}^3$ 存在有界拟凸域使得$\mathcal{B}/\mathcal{K}$是无界的[43].
- (iii) $\mathcal{B}$ 和$\mathcal{E}$: 对$\mathbb{C}^n$中的任何有界齐性域有$\mathcal{B}=\mathcal{E}$成立. 这是由于$\mathcal{B}$的Ricci曲率总等于-1 [58].
- (iv) $\mathcal{C}$ and $\mathcal{K}$: 在所有流形上有$\mathcal{C}\leq\mathcal{K}$成立[59]. 但对于$\mathbb{C}^n$中的凸域总有$\mathcal{C}=\mathcal{K}$[38]. 由于所有对称有界域在$\mathbb{C}^n$中存在有界的实现, 这就隐含了对有界对称域有$\mathcal{C}=\mathcal{K}$成立. 这一事实较早时已由文献[60]直接算出.
- 除了上述关系外, 至今并无一般性的关系成立.

- 若$\mathbb{C}^n$中的有界域D的Bergman度量的全纯截曲率存在负的上界, 则由文献[39,40]可知有不等式"$B_D \le cK_D$" 成立. 这种不等式成立就称为域D上的Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理成立.
- 从上述(ii)可知不等式$B_\Omega \le cK_\Omega$ 不是总成立的. 因此那些域成立Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理就显得十分有意义.
- 除了对有界齐性域和强拟凸域成立Begman度量和Kobayashi度量的比较定理外, K.T.Hahn和P.Pflug证明这种比较定理对2维的广义的Thullen域也成立[61],
- 殷慰萍证明这种比较定理对两种拟凸域(包含了弱拟凸域的情况)也成立[62,63].
- 对于Cartan-Hartogs域, 这种比较定理也被证明是正确的[43-46]. 以第一类Cartan-Hartogs域为例, 其上的Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理的完整叙述为:

  定理. 若B_{Y_I}和E_{Y_I}分别表示Y_I的Bergman度量和Kobayashi 度量, 则存在正常数C^*使得对所有$((w,Z),\xi) \in Y_I \times \mathbb{C}^{N+mn}$有

$$B_{Y_I}((w,Z),\xi) \le C^* E_{Y_I}((w,Z),\xi).$$

- 这种比较定理的证明是基于如下的基本定理.

  基本定理. 令β 表示在Kobayashi度量$\mathcal{K}$下的双曲Banach流形$\mathcal{D}$的Finsler度量, 若β 的全纯截曲率存在负的上界$-c^2, c \in R^+$, 则对所有$(p, v) \in T(\mathcal{D})$有

  $$\beta(p, v) \leq \frac{2}{c}\mathcal{K}_{\mathcal{D}}.$$

- 由于这个基本定理, 对上述比较定理的证明归结为对Y_I的Bergman度量的全纯截曲率是否有负的上界的估计. 一般而言, 这种估计是非常复杂的, 复杂得难以进行. 例如在复维数为2的情况下就很复杂[64,65].

- 以往克服这个困难的办法是殷慰萍提出的过渡度量的办法. 即构造一个完备的不小于Bergman度量的Kähler度量作为过渡度量, 使得这个过渡度量的全纯截曲率易于计算且有负的上界. 这样由基本定理, 这个过渡度量就小于等于Kobayashi度量乘以某一个正常数, 从而Bergman度量也小于等于Kobayashi度量乘以某一个正常数.

- 现在对于Cartan-Hartogs域而言, 由于上节已经证明了所引进的新的完备度量等价于Bergman度量, 而且证明了在新引进的度量下的全纯截曲率存在负的上下界, 这样, 要证明Bergman度量和Kobayashi度量的比较定理就很容易了. 此时由于Bergman度量等价于Einstein-Kähler度量, 因此要证明Cartan-Hartogs域上的Einstein-Kähler度量和Kobayashi度量的比较定理也就很容易了.

分别用$\omega_B(Y_I), \omega_C(Y_I), \omega_K(Y_I), \omega_{EK}(Y_I)$表示$Y_I$上的Bergman度量, Carathéodory度量, Kobayashi度量和Einstein-Kähler度量. Y_I的新的不变完备Kähler度量由5.1.可知它是$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$. 由于$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$是Finsler度量, 已经在5.4.证明了它的全纯截曲率有负的上界, 因此

$$\omega_{G_\lambda}(Y_I) \le C_1 \omega_K(Y_I),$$

而由于$\omega_{G_\lambda}(Y_I)$和$\omega_B(Y_I)$等价, 因此有

$$\omega_B(Y_I) \le C_2 \omega_K(Y_I).$$

而由于$\omega_{EK}(Y_I)$和$\omega_B(Y_I)$等价, 因此又有

$$\omega_{EK}(Y_I) \le C_3 \omega_K(Y_I).$$

后者就是Einstein-Kähler度量和Kobayashi度量的比较定理, 这定理的证明就不用具体求出Einstein-Kähler度量的表达式以及对其全纯截曲率的是否有负的上界的估计了. 利用H.Wu所叙述的经典度量之间的关系, 还可以得到这些度量之间的其他的不等式, 这里不赘述.

- 在文章[30]中提出了全纯齐性正则流形(holomorphic homogeneous regular manifolds)的概念.

  定义: n维的复流形X称为全纯齐性正则流形, 如果存在两个正数$r < R$, 使得对每一个点$p \in X$, 找得到满足如下条件的全纯映射$f_p :\to \mathbb{C}^n$:

  1) $f_p(p) = 0$;

  2)$f_p : X \to f_p(X)$ 是双全纯的;

  3)$B_r \subset f_p(x) \subset B_R$, 这里$B_r$ 与B_R是$\mathbb{C}^n$中以原点为中心的欧氏超球.

- 文章[30]同时证明了全纯齐性正则流形上的Bergman度量, Carathéodory度量, Kobayashi度量都是彼此等价的. 假如Cartan-Hartogs域是全纯齐性正则流形, 那么Cartan-Hartogs域上的经典度量就都彼此等价. 因此有如下的

- **Open Problem 3:** Cartan-Hartogs域是否为全纯齐性正则流形?

7 华罗庚域的Einstein-Kähler度量的显式

- 对Einstein-Kähler度量的研究是国际数学界的热门研究领域. Cheng-Yau和Mok-Yau证明了任何有界拟凸域存在唯一的完备Einstein-Kähler度量使得其Ricci曲率等于-1 [66,67]. 但是其证明是高度的非构造性的, 因而除了齐性域外要写出它的显式极为困难.

- 对于$\mathbb{C}^n$中域D的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量若表为

$$E_D(z) := \sum \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} dz_i \overline{dz_j},$$

则g 是复Monge-Ampère 方程如下边值问题的唯一解:

$$\begin{cases} det\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) = e^{(n+1)g} & z \in D, \\ g = \infty & z \in \partial D, \end{cases}$$

其中的g 称为Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数. 要找域D的Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式就是要找其生成函数g的显表达式. 当D为$\mathbb{C}^n$中的有界拟凸域时, 丘成桐他们实际上证明了上述复Monge-Ampère 方程的边值问题的解是存在和唯一的.

- 所谓Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式就是要把上述边值问题的解的显式求出来. 从事研究偏微分方程的学者都知道, 复Monge-Ampère 方程是高度非线性偏微分方程, 哪怕是给出它的一个特解都是非常困难的. 要显式得到它的上述边值问题的唯一解当然就极其困难了, 人们一般并不奢望能求出它来.
- 但是很多的多复变和复几何的专家认为给出其显表达式是很有意义的, 因为这样对研究域的边界不变量和渐近性质很有帮助.
- Bland[68]研究了蛋型域$\{|z|^2+|w|^{2p}<1\}$的Einstein-K$\ddot{a}$hler度量, 没有找到其显表达式, 仅仅找到包含它的隐函数.
- 王安在殷慰萍的指导下, 求出了第一类Cartan-Hartogs域$Y_I(1,m,n;K)$当$K=\frac{mn+1}{m+n}$,$m\neq 1$时的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式[47,50].
- 其后, 其余的Cartan-Hartogs域的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式也陆续找到[48,49,51].
- 这是第一次在非齐性域上给出的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量显式的例子.

- 他们的方法是首先把上述复Monge-Ampère 方程化为以X为变量的常微分方程:

$$\begin{cases} X\mathcal{Y}^{\mathcal{N}-1}\dfrac{d\mathcal{Y}}{dX} = \mathcal{Y}^{\mathcal{N}+1} - \dfrac{\lambda-1}{\mathcal{N}}\mathcal{Y}^{\mathcal{N}} + \dfrac{(\lambda-\mathcal{N}-1)\lambda^{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^{\mathcal{N}+1}} \\ \mathcal{Y}(0) = \dfrac{\lambda}{\mathcal{N}+1} \end{cases}$$

- 若

$$g = \frac{1}{\mathcal{N}+1}log[(\frac{\mathcal{Y}}{K})^{\mathcal{N}-1}\frac{d\mathcal{Y}}{dX}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+\frac{1}{K})}]$$

中的$\mathcal{Y}$是上述方程的解, 则g就是Monge-Ampère 方程的解. 在这里$\mathcal{Y}$是X的函数, 而$X = |w|^2[det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}}$ 在$Aut(Y_I)$下不变, $\mathcal{N} = mn+1, \lambda = K(m+n)+1$.

- 当$K = \frac{mn+1}{m+n}$,$m \neq 1$时, $\lambda = m+n+2 = \mathcal{N}+1$. 上述常微分方程方程化为

$$\begin{cases} X\frac{d\mathcal{Y}}{dX} = \mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} \\ \mathcal{Y}(0) = 1 \end{cases}$$

可解出$\mathcal{Y} = \frac{1}{1-C^*X}$，其中$C^*$为任意常数.

- 若取$C^*=1$，则$\mathcal{Y}=\frac{1}{1-X}:=Y$, 于是

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{\mathcal{N}+1} log[(\frac{Y}{K})^{\mathcal{N}-1}\frac{dY}{dX}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+\frac{1}{K})}] \\ &= log[\frac{1}{1-X}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-\frac{1}{K}}K^{\frac{1-\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}}] \end{aligned}$$

- 容易证明g是复Monge-Ampère 方程的解, 而且当$\forall(z,w)\in Y_I,(z,w)\to\partial Y_I$, 有$g(z,w)\to+\infty$. 因此$g$是$Y_I$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数. 这样就得到了$Y_I$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式. 此时的$Y_I(1,m,n;K)$为非齐性域.

- 用同样方法可以得到其余Cartan-Hartogs域的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的显表达式.

- 第二类Cartan-Hartogs域$Y_{II}(1,p;K)$当$K=1/(p+1)+p/2,p>1$时, 其完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数为:

$$g=\log[\frac{1}{1-X}\det(I-Z\overline{Z}^t)^{-\frac{1}{K}}K^{\frac{1-\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}}].$$

其中$X=X(Z,w)=|w|^2[\det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}},\mathcal{N}=\frac{1}{2}p(p+1)+1$.

- 第三类Cartan-Hartogs域$Y_{III}(1,q;K)$当$K=1/(q-1)+q/2,q>1$时, 其完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数为:

$$g=\log[\frac{1}{1-X}\det(I-Z\overline{Z}^t)^{-\frac{1}{K}}(K/2)^{\frac{1-\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}}].$$

其中$X = X(Z,w) = |w|^2[\det(I - Z\overline{Z}^t)]^{-\frac{1}{K}}, \mathcal{N} = \frac{1}{2}q(q-1)+1.$

- 第四类Cartan-Hartogs域$Y_{IV}(1,n;K)$当$K = 1/n+1$时, 其完备Einstein-Kähler度量的生成函数为:

$$g = \log[\frac{1}{1-X}\beta(Z,Z)^{-\frac{1}{K}}(K/2)^{\frac{1-\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}}].$$

  其中$X = X(Z,w) = |w|^2[\beta(Z,Z)]^{-\frac{1}{K}}$, $\beta(Z,Z) = 1 + Z\overline{Z}^t\overline{Z\overline{Z}^t} - 2Z\overline{Z}^t$, $\mathcal{N} = n+1$. 上述的域也为非齐性域.

- 这样就得到了非齐性域的完备Einstein-Kähler度量的显表达式, 这在以往从未出现. 这也是个首创性的成果.

- 自从华罗庚求出Cartan域的Bergman度量的生成函数Bergman核函数之后, 已经找到了很多寻求Bergman度量的显表达式的方法, 并形成了一个研究方向. 我们希望也像寻求Bergman核函数的显表达式那样, 使得如何寻求完备Einstein-Kähler度量的显表达式也成为一个研究方向.

- 上面考虑的四类Cartan-Hartogs域有一个共同之点, 就是W是一个复数. 假如W是一个N维复向量时, 相应的四类Cartan-Hartogs域的完备Einstein-Kähler度量的显表达式能求出来吗?当然可以. 殷慰萍他们已经把相应的完备Einstein-Kähler度量的显表达式求了出来.

- 方法上可沿用上述化为常微分方程的方法, 但是也可根据已有的结果猜想完备Einstein-Kähler度量的生成函数的显表达式, 然后直接证明之.

- 这里以第一类Cartan-Hartogs域$Y_I(N,m,n;K)$为例来说明. 首先,由(2.12)和(2.13)可知, $Y_I(1,m,n;K)$的Bergman核函数的对数为

$$C_* log[F(Y)det(I-ZZ^T)^{-(m+n+1/K)}].F(Y)=\sum_{i=1}^{mn+1} a_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}.$$

- 而其完备Einstein-Kähler度量的生成函数为

$$g=\frac{1}{\mathcal{N}+1}log[Y^{\mathcal{N}+1}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+\frac{1}{K})}K^{1-\mathcal{N}}].$$

两相比较, 若$F(Y)$中只取Y的最高项Y^{mn+2}, 不计一些常数因子, 则上述第一式和最后一式是相等的.

- 而由(2.14)可知$Y_I(N,m,n;K)$的Bergman核函数的对数为:

$$log[G(Y)det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+N/K)}].$$

其中$G(Y)=\sum_{i=0}^{mn+1} a_i\Gamma(N+i)Y^{N+i}, Y=(1-X)^{-1}, X=|W|^2[det(I-Z\overline{Z}^t)]^{-1/K}, |W|^2=\sum_{j=1}^{N}|W_j|^2$.

- 因而可以猜想$Y_I(N,m,n;K)$完备Einstein-Kähler度量的生成函数为

$$g=\frac{1}{mn+N+1}log[Y^{\lambda}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+N/K)}\sigma].$$

- 把它代入Monge-Ampère 方程：

$$det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) = e^{(mn+N+1)g}$$

使得满足此方程而把待定的常数λ和σ决定之. 而它符合所要求的边界条件是容易证明的.

- 用这种方法也可以得到四类Cartan-Hartogs域当W为一般的复向量时的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数.

- 这种想法并不复杂, 但它的实现还需要克服一个技术上的困难. 上式的左端是一个$mn+N$阶的行列式, 它既不是对角形的也不是三角形的, 因而要计算出它的值一般而言是存在技术上的困难.

- 我们运用一些技巧验证了当$\sigma = K^{-mn}, \lambda = mn+N+1$即$K = \frac{mn+1}{m+n}$时,

$$g = \frac{1}{mn+N+1} log[Y^{mn+N+1} det(I - Z\overline{Z}^t)^{-(m+n+N/K)} K^{-mn}].$$

就是当$K = \frac{mn+1}{m+n}$时$Y_I(N, m, n; K)$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数.

- 同样方法可以求得其他Cartan-Hartogs域当W为r维复向量时的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量的生成函数.
- 当$K=\frac{p}{2}+\frac{1}{p+1}$时, $Y_{II}(r,p;K)$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量生成函数为:

$$g \;=\; \tfrac{1}{N+1}\log[Y^{N+1}\det(I-Z\overline{Z})^{-(1+p+\frac{r}{K})}K^{r-N}].$$

这里$X=|w|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-1/K}=(|w_1|^2+|w_2|^2+\cdots+|w_r|^2)\det(I-Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}$, 而$Y=(1-X)^{-1}$, $N=p(p+1)/2+r$.

- 当$K=\frac{q}{2}+\frac{1}{q-1}$时, $Y_{III}(r,q;K)$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量生成函数为:

$$g=\frac{1}{N+1}log[Y^{N+1}det(I-Z\overline{Z}^t)^{-(q-1+\frac{r}{K})}(\frac{2}{K})^{N-r}]$$

这里$X=|w|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-1/K}=(|w_1|^2+|w_2|^2+\cdots+|w_r|^2)\det(I-Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}$, 而$Y=(1-X)^{-1}$, $N=q(q-1)/2+r$.

- 当$K=1+\frac{1}{n}$时, $Y_{IV}(r,n;K)$的完备Einstein-K$\ddot{a}$hler度量生成函数为

$$g=\frac{1}{n+r+1}log[Y^{n+r+1}\beta(Z,Z)^{-(n+\frac{r}{K})}(\frac{2}{K})^n].$$

这里$\beta(Z,Z)=1-2Z\overline{Z}^t+|ZZ^t|^2$, $Y=(1-X)^{-1}$, $X=X(Z,W)=|W|^2[\beta(Z,Z)]^{-\frac{1}{K}}$.

- **Open Problem 4:** 是否还存在其它的华罗庚域可以求出其完备Einstein-Kähler度量的显表达式?
- 关于Bergman核函数显表达式的参考文献还可见综合性论文[69],
- 有关华罗庚域的论文还可以参阅殷慰萍的专著《嘉当域到华罗庚域》[70].
- 丘成桐认为, 由于广义相对论的兴趣, 具常Ricci曲率的度量特别重要. 长时间以来我们知道的例子仅是哪些有一紧致李群在其上可递作用的流形. 在很长时间里, 人们没有非齐性Einstein流形的例子. 即使对于非紧致流形, 完备Einstein-Kähler度量也是典型的, 理当得到更多的研究[71].
- 美国加州大学Berkeley分校伍鸿熙教授认为, 在四个经典度量中, 以Einstein-Kähler度量的计算最为困难[56].

欢迎研究华罗庚域!

谢　谢!
Thank You!

8 参考文献

[01] E.Cartan. Sur les domains dornes homogenes de l'espace de n variables complexes. Hamburg Univ. Math. sem. Abhandl., 1936, 11: 106-162.

[02] 华罗庚. 多复变函数论中的典型域的调和分析. 北京: 科学出版社, 1959.

[03] Yin Weiping. Two problems on Cartan domains. J of China Univ of Sci and Tech. 1986, 16(2): 130-146.

[04] Yin Weiping.四类超Cartan域的Bergman核函数. 科学通报(A辑), 1999, 44(21): 1947-1951.

[05] Yin Weiping. The Bergman kernels on super-Cartan domain of the first type. Science in China(series A), 2000, 43(1): 13-21.

[06] 殷慰萍. 第二类超Cartan域的Bergman 核函数. 数学年刊, 2000, 21A(3): 331-340.

[07] 殷慰萍. 第三类超Cartan域的Bergman 核函数. 数学进展, 2000, 29(5): 425-434.

[08] 殷慰萍. 第四类超Cartan域的Bergman核函数. 数学学报, 1999,42(5): 951-960.

[09] 管冰辛, 殷慰萍. 第四类超Cartan域上的Bergman 核函数和一类双全纯不变量. 厦门大学学报(自然科学版), 2000, 39(5): 581-587.

[10] Yin Weiping. The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domain. Complex Variables (纪念庄圻泰专集), 2001, 43(3-4): 477-494.

[11] Weiping Yin. The Bergman kernels on four types of Cartan-Hartogs domain, Classical Analysis, Proceedings of the 10th International Symposium, T.Mazut ed., Warsaw: Warsaw Agricultural University Press, 2001: 95-112.

[12] Yin Weiping, Lu Keping, G.Roos. New classes of domains with explicit Bergman kernel. Science in China Seris A Mathematics, 2004, 47(3): 352-.

[13] Yin Weiping. The Bergman kernels on Cartan-Egg domain of the first type. Northeast Mathematics J., 2001,17(2): 210-220.

[14] 殷慰萍. 第一类Cartan-Egg域的Bergman核函数. 数学进展, 2001, 30(6): 533-542.

[15] YIN Wiping, WANG Nan, ZHAO Ling. Explicit computations of Bergman kernel on Cartan-Egg domain of the second and third type, World Science, Singapore-New Jersery-London-Hong-Kong, 2000: 253- 260.

[16] 殷慰萍, 王男, 赵玲, 管冰辛. 四类Cartan-Egg域的Bergman核函数. 首都师范大学学报(自然科学版), 2001, 22(2): 1-13.

Institute of Structural Mechanics

[17] 殷慰萍, 王男. 第二类华罗庚域的Bergman核函数. 中国科技大学学报,2001,31(1):7-15.

[18] 殷慰萍, 赵振刚. 第二类华罗庚域的Bergman核函数的计算. 厦门大学学报(自然科学版), 2001, 40(6):473-476.

[19] 殷慰萍, 管冰辛. 第四类华罗庚域的Bergman核函数. 数学学报, 2003, 46(1): 85-94.

[20] Yin Weiping, Wang An, Zhao Zhengang, Zhao Xiaoxia, Guan Bingxin. The Bergman kernel functions on Hua domains. Science in China (Series A), 2001, 44(6): 727-741.

[21] 殷慰萍, 赵晓霞. 第三类华罗庚域的Bergman核函数. 数学年刊, 2003, 24A(1): 81-90.

[22] Yin Weiping, Su Jianbing. The explicit computations of Bergman Kernels on Generalized Hua Domains. Progress in Natural Science, 2002, 12(12): 893-899.

[23] Yin Weiping, Zhao Zhengang. The Bergman Kernels on Generalized Exceptional Hua Domains. Science in China(Series A), 2002, 45(3): 321-334.

[24] Zhang Liyou. Bergman Kernel function on Hua construction of the second type. Science in China Ser.A Mathematics, 2005, 48(supp): 400-412.

[25] Zhang Wenjuan. Bergman kernel function on the third Hua construction. Science in China Ser.A Mathematics, 2005, 48(supp): 413-423.

[26] S. Bergman, $\ddot{U}$ber die Entwickling der harmonischen Funktionen der Ebene und Raumes nach Orthogonalfunktionen, Math. Ann.**96**(1922), 237-271.

[27] S. Bergman, $\ddot{U}$ber die kernfunktion eines Bereiches und ihre Verhalten am Rande, J. Reine Angew. Math., 1933,169: 1-42; 1935,172: 89-128.

[28] Boas H P, Fu Siqi, Straube E J. The Bergman kernel function: Explicit formulas and zeroes. Proc of AMS., 1999, 127(3):805-811.

[29] Bell S R. The Bergman kernel function and proper holomorphic mappings. Trans Amer Math Soc, 1982, 270: 685-691.

[30] Kefeng Liu, Xiaofeng Sun, Shing-Tung Yau. Geometric aspects of the moduli space of Riemann surfaces. Science in China Ser.A Mathematics, 2005, 48(Supp): 97-122.

[31] Kefeng Liu,Xiaofeng Sun,Shing-Tung Yau. Canonical metrics on the moduli space of Riemann surface I. J. Differential Geom., to appear.

[32] Kefeng Liu,Xiaofeng Sun,Shing-Tung Yau. Canonical metrics on the moduli space of Riemann surface II. J. Differential Geom., to appear.

[33] Shing-Tung Yau. A general Schwarz lemma for Kähler manifolds. Amer. J. Math., 1978, 100(1): 197-203.

[34] Shing-Tung Yau. A general Schwarz lemma for Kähler manifolds. Amer. J. Math., 1978, 100(1): 197-203.

[35] 陆启铿. 典型流形与典型域. 上海: 上海科学技术出版社, 1963.

[36] Yin Weiping, Zhao Zhengang. Completeness of the Bergman metric. Advances in Mathematics (CHINA). 2000, 29(2): 189-191.

[37] S.Kobayashi. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. New York: Marcel Dekker, 1970.

[38] L. Lempert. Holomorphic reretracs and Intrinsic metrics in convex domains. Analysis Mathematica 1982, 8: 257-261.

[39] M.Heins. On a classof conformal metrics, Nagoya Math.J.,21(1962):1-60

[40] S.Dineen. The Schwarz Lemma. Oxford: Clarendon Press, 1989.

[41] Qikeng Lu(=K.H.Look). Schwarz lemma and analytic invariants. Sci. Sinica, 1958,7:435-504.

[42] K.T. Hahn. Inequality between the Bergman metric and Carathéodory differential metric. Proc. Amer.Math.Soc. 1978,68:193-194.

[43] Yin Weiping, Zhao Xiaoxia. The comparison theorem on Cartan-Hartogs domain of the third type. Complex Variables, 2002, 47(3): 183-201.

[44] Yin Weiping, Wang An, Zhao Xiaoxia. The comparison theorem for the Bergman and Kobayashi metrics on Cartan-Hartogs domains of the first type. Science in China (Series A), 2001, 44(5): 587-598.

[45] 林萍, 殷慰萍. 第四类超Cartan域的比较定理. 数学进展,2003,32(6):739-750.

[46] Zhao Xiaoxia, Ding Li, Yin Weiping. The comparison theorem on Cartan-Hartogs domain of the second type. Prog.in Nat.Sci., 2004, 14(2): 105-112.

[47] 殷慰萍, 王安. 第一类超Cartan域的Einstein-Kähler度量. 中国科学(A辑), 2003, 33(4): 384-396.

[48] 王安, 殷慰萍, 张文娟. 第三类Cartan-Hartogs域的Einstein-Kähler 度量. 数学进展, 2004,33(2): 215-228.

[49] Weiping Yin, An Wang,Liyou Zhang, Wenjuan Zhang. Einstein-Kä hler metric with explicit formula on non-homogeneous domain. Asian J.of Mathematics, 2004, 8(1): 39-49.

[50] Wang An. The Einstein-Kähler metric on Hua constraction of the first type. Science in China Ser.A Mathematics, 2005, 48(5): 711-719.

Institute of Structural Mechanics

[51] Yin Xiaolan, Zhao Xiaoxia. The computations of Einstein-Kähler metric of Cartan-Hartogs domain. Sci. in China Ser.A Math.,2005,48(supp):365-376.

[52] C. Carathéodory, *Über* des Schwarzshe Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veranderlichen, Math. Ann., 1926, 97: 76-98.

[53] H.-J. Reiffen, Die Differentialgeometrischen Eigenschaften der invarianten Distanzfunktionen von Carathéodory. Schr. Math. Inst. Münster, Nr., 1963,26:18.

[54] S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan.,1967,19: 460-480.

[55] H. L. Royden, Remarks on the Kobayashi metric, Several Complex Variables II, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1971,185: 125-.

[56] H. Wu, Old and new invariant metrics on complex manifolds, Several complex variables, Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987-1988(J. E. Fornæss, ed.), Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993,38: 640-682.

[57] K. Diederich, J.E.Fornaess. Comparison of the Bergman and the metric, Math.Ann., 1980, 254(3): 257-262

[58] S.Helgason. Differential Geometry and Symmetric spaces. New York and London: Academic Press, 1962. p.300.

[59] S.Kobayashi. Intrinsic sistances, measures and geometric function theory. Bull. Amer. Math. Soc. 1976, 82: 357-416.

[60] S.Kobayashi. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. New York: Marcel Dekker, 1970.

[61] K.T.Hahn, P.Pflug. The Kobayashi and Bergman metrics on generalized Thullen domains, Proc.of AMS, 1988, 104: 207-214

[62] Yin Weiping. Curvature on a class of Reinhardt domains, Science in China(Series A), 1992, 35(11): 1281-1293.

[63] Weiping Yin. The comparison theorem for the Bergman and Kobayashi metrics on certain pseudoconvex domains. Complex Variables, 1997, 34: 351-373.

[64] K.Azukawa, M.Suzuki. The Bergman metric on Thullen domain. Nagoya Math. J., 1983, 89: 1-11.

[65] K.Azukawa. Bergman metric on a domain of Thullen type. Math. Rep. Toyama University, 1984, 7 : 41-65.

[66] S.Y. Cheng and S.T. Yau. On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation. Comm. Pure Appl. Math., 1980, 3: 507-544.

[67] N. Mok and S.T. Yau. Completeness of the Kähler-Einstein metric on bounded domain and the characterization of domain of holomorphy by curvature conditions. Proc Symposia Pure Math., 1983, 39: 41-59.

[68] J. Bland. The Einstein- Kähler metric on $\{|z|^2 + |w|^{2p} < 1\}$. Michigan Math. J., 1986, 33: 209-220.

[69] 殷慰萍. 有界域的Bergman核函数显式表示的最新进展. 数学进展, 2002, 31(4): 295-312.

[70] 殷慰萍. 嘉当域到华罗庚域. 北京: 首都师范大学出版社, 2003.

[71] S.-T. Yau. 微分方程在微分几何中的应用(1978年赫尔辛基国际数学家大会上的一小时报告). 数学译林(试刊), 1980, 1: 1-12. 原文见:Proceedings of The International Congress of Mathematics, Helsinki, 1978.

[72] E.Bedford, S.I.Pinchuk. Domains in $\mathbb{C}^2$ with noncompact group of automorphism. (Russian) Mat.Sb., 1988, 135: 147-157; (English) Math. USSR Sbornik, 1989, 63: 141-151.

[73] I.Ramadanov. Sur une propriete de la fonction de Bergman. C.R.Acad. Bulgare Sci., 1967,20: 759-762.