国家基金委和教育部博士点基金资助项目
2006年10月13日 · 中科院数学所学术报告厅

陆启铿猜想四十年

Forty Years on Lu Qi-Keng Conjecture

殷慰萍

首都师范大学数学科学学院

wpyin@263.net or wyin@mail.cnu.edu.cn

陆启铿猜想四十年

- 陆启铿猜想的历史回顾
- Bergman核函数及陆启铿猜想
- 陆启铿猜想的研究概况
- 研究陆启铿猜想的思想和方法
- 陆启铿猜想的新研究领域
- 陆启铿猜想的Open Problems
- 注　记

1 陆启铿猜想的历史回顾

- 陆启铿猜想起源于陆启铿的文章《关于常曲率的Kahler流形》[1]中所提出的一个问题. 该文发表于文化大革命前的最后一期1966年3月的《数学学报》(1966, 16(2): 269-281). 由于那时的《数学学报》被美国数学会有选择的翻译, 并发表于名为《Chinese Mathematics》的杂志上, 而陆启铿的那篇文章有幸被选中, 从而在世界范围内传播. 1969年, 波兰数学家M.Skwarczynski在《Proceedings of American Mathematical Society》(1969, 22: 305-310)发表文章[2], 第一个把陆启铿提出的问题称为陆启铿猜想. 陆启铿猜想是关于多维复数空间中有界域的Bergman核函数有无零点的猜想.

- 1999年9月20日至9月26日在波兰举行第10届"International Symposium on Classical Analysis", M.Skwarczynski为大会主席, 殷慰萍有幸被邀作大会邀请报告. 并了解到M.Skwarczynski有访华的愿望. 回国后就建议陆启铿邀请M.Skwarczynski访华, 陆启铿欣然同意. 最后M.Skwarczynski于2000年夏季成行, 在中科院数学所访问了一个月. 这样31年之后陆启铿猜想的命名者和陆启铿终于会面. 自从M.Skwarczynski把陆启铿提出的问题称为陆启铿猜想之后, 引起不少数学家的兴趣而研究之. 其中不乏著名的数学家, 例如1995年同时获得Bergman奖的Emil J Straube教授和Harold P. Boas教授(他们都在Texas A&M University工作)以及欧美和日本的一些数学家.

- 现在陆启铿猜想已经成为了多复变函数论中的一个活跃的研究方向.
- 1979年R.E.Greene和H.Wu首先把陆启铿猜想写入他们合著的专著《Function theory on manifolds which posses a pole》(Springer Verlag出版, Lecture Notes in Mathematics 699)的第178页.
- 其后, S.G.Krantz在其1982年由John Wiley & Sons出版的专著《Function Theory of Several Complex Variables》的第53页阐述了陆启铿猜想,
- 同样M.Jarnicki和P.Pflug在1993年他们的专著《Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis》(Walter de Gruyter出版）的第184页也阐述了陆启铿猜想.
- H.P.Boas教授于1998年在韩国召开的第三届KSCV的国际会议上以"Lu Qi-keng's Problem"为题对陆启铿猜想的研究情况作了一个综合报告. 该报告于2000年发表[3].

- Boas认为, Bergman核函数实际上就是一个无穷级数, 一般讨论一个无穷级数的零点的分布都比较困难. 他认为陆启铿猜想的难度相当于讨论Riemann zeta函数$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ 的零点分布问题, 即相当于Riemann猜想的难度.
- Boas的原话是: ”It is a difficult problem to determine whether the Bergman kernel function of a specific domain has zeroes or not. If the kernel function is presented as an infinite series, then locating the zeroes may be of the same order of difficulty as proving the Riemann hypothesis; and even if the series can be summed in closed form, determining whether or not 0 is in the range may be hard.”

- 难度大, 就需要新的思想和方法, 就会促进数学的发展. 因此研究陆启锂问题是相当有意思的, 正日益引起更多数学家的兴趣和注意. 陆启铿本人也对此问题很感兴趣, 并准备召开一次"Bergman核函数的零点"的Workshop, 推动该问题的研究.
- 由于文化大革命的原因, 陆启铿本人在陆启铿猜想面世后的十年内, 根本不知道有陆启铿猜想此事. 不久前, 殷慰萍与陆启铿聊天时, 他还说起, 华罗庚在70年代中期曾问过陆启铿何谓陆启铿猜想. 陆启铿十分惊讶, 膛目结舌. 后来去查了Mathematical Reviews才知道是M.Skwarczynski把陆启铿1966年在文章《关于常曲率的Kahler流形》中所提的Bergman核函数有无零点的问题称之为陆启铿猜想.
- 实际上称为陆启铿问题更符合实际. 因而H.P.Boas恢复原意称之为陆启铿问题, 陆启铿本人也接受这种称谓. 但是这两种称谓是一回事.

2 Bergman核函数及陆启铿猜想

- 设D是C^n中的有界域, 若$H(D)$表示所有在D全纯的函数的集合, 令

$$L^2H(D) = \{f(Z) \in H(D) : \int_D |f(Z)|^2 dV < \infty\}.$$

这里dV表示域D的欧氏测度. 则$L^2H(D)$是一个Hilbert 空间, 其内积为:

$$< f, g >= \int_D f(Z)\overline{g(Z)}dV, f, g \in L^2(D).$$

它具有可数基. 设$\{\varphi_k(Z)\}, k = 0, 1, 2, \ldots$是$L^2H(D)$的完备的标准正交基. 则

$$K_D(Z, \overline{T}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(Z)\overline{\varphi_k(T)}, (Z, T) \in D \times D. \qquad (1.1)$$

称为域D的Bergman核函数, 它是唯一的, 且不依赖于域D的完备标准正交基的选择.

- 它又称为域D的再生核, 即它有如下的再生性质: 对任意的$f \in L^2H(D)$ 有

$$f(Z) = \int_D f(T)K_D(Z,\overline{T})dV_T, Z \in D. \tag{1.2}$$

这是域D的Bergman核函数的一个特征性质, 也就是说, 式子(1.2)可以作为域D的Bergman核函数的定义.

设域$D_1, D_2 \in C^n$, 若$F(Z) : D_1 \to D_2$是双全纯变换, 设$F'(Z)$是此变换的Jacobian矩阵, 令det表示行列式, K_1, K_2分别表示域D_1, D_2的Bergman核函数，则有

$$K_1(Z,W) = (detF'(Z))K_2(F(Z),F(W))(det\overline{F'(W)}). \tag{1.3}$$

这是由于若$\{\varphi_j\}$是$L^2H(D_1)$的完备标准正交基, 则$\{(detF')\varphi_j \circ F\}$是$L^2H(D_2)$的完备标准正交基.

若$D_1 = D_2 = D$, 则(1.3)变为

$$K(Z,W) = (detF'(Z))K(F(Z),F(W))(det\overline{F'(W)}). \tag{1.4}$$

- 若D为包含原点的有界圆型齐性域, Z_0为D内任意一点, 则存在D的全纯自同构F使得$F(Z_0)=0$, 则(1.4)变为

$$K(Z_0,W)=(detF'(Z_0))K(0,F(W))(det\overline{F'(W)}).$$

而$L^2H(D)$的完备的标准正交基$\{\varphi_k(Z)\}_{k=0,1,2,\dots}$中每一个$\varphi_k(Z)$都是$Z$的$k$次齐次多项式, 特别$\varphi_0(Z)=a_0^1\neq 0$为常数. 因此(1.4)式中的$K(0,F(W))=|a_0^1|^2=K(0,0)$. 由于$Z_0$为$D$内任意一点, 因此在(1.4)式中令$Z_0=Z$, 就得到有界圆型齐性域求其Bergman核函数的公式:

$$K(Z,W)=(detF'(Z))K(0,0)(det\overline{F'(W)}). \tag{1.5}$$

其中$K(0,0)$实际上就是齐性域D的体积的倒数.

- 讲到现在, 到底什么是陆启铿猜想? 实际上陆启铿猜想或陆启铿问题就是研究讨论Bergman核函数的零点. 为什么要研究讨论这种零点?有什么意义? 这要从Riemann映照定理讲起.

- Riemann映照定理是说, 在复数平面C上的任意一个单连通域$D \neq C$, 则一定存在一个双全纯映照F, 把D映为单位圆盘Δ. 若要求把$t \in D$映为原点, 而且$F'(t) > 0$, 则此种映照是唯一的. 这时称域D全纯等价于Δ, 或解析等价于Δ. 这样在全纯等价的条件下, C中的单连通域只有两个等价类, 一个是C本身, 另一个是以Δ为代表的等价类, Δ称为其所代表的等价类中的标准域. 研究了Δ中的双全纯不变量, 就等于研究了所有单连通域$D \neq C$的相应的不变量. 若在扩充的复数平面(C加上无穷远点)C_∞上考虑, 那么还有一个等价类C_∞. 在高维的情况, 不存在Riemann映照定理, 因为其互不全纯等价的单连通域有无穷多个. 众所周知, 在高维的情况一般研究如下的两个问题作为Riemann映照定理的替代:
- 1) 在每一个全纯等价类中, 是否存在像单位圆盘Δ那样的标准域?
- 2) 任给两个不同的域, 如何判断它们全纯等价与否, 这就产生研究在双全纯映照下的不变量的问题.

- 对于第一个问题, 首先分析一下一维的情况. 若$K(z,w)$是域$D \neq C$的Bergman核函数, 则映D为Δ, 而且把$t \in D$映为原点, 使得$F'(t) > 0$的双全纯映照F可以表示为

$$F(z) = \frac{1}{K(t,t)} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} log \frac{K(z,w)}{K(w,w)} |_{w=t}.$$

在高维的情况, 设D是C^n中的一个有界域, $K(Z,W)$是D的Bergman核函数, 则Bergman度量方阵为

$$T(Z,Z) = (g_{ij}) = (\frac{\partial^2 log K(Z,W)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}).$$

设其逆方阵为$T^{-1}(Z,W)$. Stefan Bergman仿照一维的情况, 得到域D的映照为

$$F(Z) = \frac{\partial}{\partial \overline{W}} log \frac{K(Z,W)}{K(W,W)} |_{W=t} T^{-1}(t,t).$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \overline{W}} = (\frac{\partial}{\partial \overline{W_1}}, \frac{\partial}{\partial \overline{W_2}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{W_n}}).$$

映照$F(Z)$把t映为原点, 而且其Jacobian矩阵在t点为单位矩阵. Stefan Bergman称D在$F(Z)$下的像为表示域, 而称$F(Z)$为表示坐标. 这样D的表示域就是问题1中的标准域.

- 但是这些都要求D的Bergman核函数$K(Z,W)$在$(Z,W) \in D \times D$时没有零点然后$F(Z)$才在整个D上有确切的定义. 陆启铿在文[1]中说: "似乎还没有人证明过对一般的C^n的有界域D的Bergman核函数$K(Z,W)$当$(Z,W) \in D \times D$时没有零点, 虽然很多具体例子都对." 这就是陆启铿所指出的问题. 此问题M.Skwarczynski在1969年在其论文[2]中称之为陆启铿猜想, 若其Bergman核函数$K(Z,W)$在$(Z,W) \in D \times D$时无零点, 就称陆启铿猜想成立, 而该域D就称为陆启铿域.
- Harold P.Boas在文[3]中根据Bergman核函数的变换公式(1.3)指出, 一个域的Bergman核函数的零点的集合在双全纯映照下是不变的, 此即一个域的Bergman核函数的零点变成了像域的Bergman核函数的零点. 这也可以用来判别两个域是否全纯等价的问题, 这就与问题2有关了.

3 陆启铿问题的研究概况

下面综述一下到现在为止的陆启铿问题的研究情况. 分两个方面, 那些域是陆启铿域, 那些域不是陆启铿域.

下面的一些结果是很基本的且容易证明的:

- A. 熟知, 一个域若是其他若干个域的直乘积, 则该域的Bergman核函数就是其他若干个域的Bergman核函数的乘积. 因此, 若干陆启铿域的直乘积一定是陆启铿域. 非陆启铿域和其他域组成的直乘积一定不是陆启铿域.

- B. 由于Bergman核函数在双全纯映照下的变化规律(1.3), 因此, 陆启铿域在双全纯映照下的像也是陆启铿域, 非陆启铿域在双全纯映照下的像一定不是陆启铿域.

- C. 设D 是有界域, $D_m \subset D$是一系列的域, 而且$limD_m = D$, 设$K_m(z,w), K(z,w)$ 分别是D_m, D的Bergman核函数, 则众所周知$limK_m(z,w) = K(z,w)$. 由Hurwitz定律, 若D_m都是陆启铿域, 则D也是陆启铿域, 若D不是陆启铿域, 则存在充分大的正整数M, 使得当$m > M$ 时, D_m都不是陆启铿域, 即此时的D_m的Bergman核函数都有零点.

- D. 由于双全纯映照的Jcobian矩阵的行列式总不为零, 由(1.5)可知, 所有的有界齐性圆型域都是陆启铿域. 而且也容易证明任何有界齐性域都是陆启铿域. 在复数平面C, 由Riemann映照定理, 以及B所述的事实, C中的任何有界单连通域$D \neq C$一定是陆启铿域. 而且C中的任何具有光滑边界的有界域为陆启铿域的充要条件为该域是单连通的[14].

- 3.1. 那些域的Bergman核函数有零点

在陆启铿猜想提出的初期, 很多是给陆启铿猜想举反例, 即那些域的Bergman核函数有零点(即该域不是陆启铿域).

- 第一个给出反例的是Skwarczynski, 1969年他在文[2]中给出C中的一个多连通域的Bergman核函数有零点, 也就是说它不是陆启铿域.

- 1969年, Paul Rosenthal在文[12]中证明: 复数平面中的圆环$D = \{0 < r < |z| < 1\}$不是陆启铿域; 而且对任何$k > 2$, 在C中总存在一个k连通域不是陆启铿域.

- 1976年, Nobuyuki Suita, Akira Yamada 在文[14]中证明每一个非单连通的有限Riemann 曲面不可能是陆启铿域.

- 1986年, Harold P.Boas在文[13]中给出反例, 存在光滑的完备的强对数性凸的Reinhardt域不是陆启铿域.

- 1998年, P.Pflug 和E.H.Youssfi 在文[10]中证明C^n中的最小球(minimal ball)=$\{z \in C^n : |z|^2 + |zz'| < 1\}$的Bergman核函数当$n \geq 4$ 时有零点. 该域的Bergman核函数的显表达式在文[11]中给出.
- 2000年, Nguyên Viêt Anh 在C^n中当$n \geq 3$ 时, 构造了一类有界完备强凸的Reihardt域使得其Bergman核函数有零点, 见文[5].
- 2000年, Miroslav Engliš 在文[9]中证明Hartogs域$\{(z,t) \in \Omega \times C^m : \|t\| < F(z)\}$, 这里$\Omega$是$C^d$中的具有无穷可微边界的有界强凸域, $-F$是Ω的无穷可微的强凸的定义函数, 当m充分大时, 该Hartogs域不是陆启铿域. 但是没有给出m到底要多大.
- 2000年, Harold P.Boas在其综合报告[3]中指出域

$$\Omega_H = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_2| < \frac{1}{1+|z_1|}\}$$

的Bergman核函数在原点有零点. 初看起来这与熟知的Bergman核函数的对角形式不具有零点这个事实相矛盾, 但是Ω_H是无界的, 因此这种矛盾不存在.

- II.2. 那些域是陆启铿域

这方面的结果除了上面A,B,C,D指出的情况外, 正面的结果很少.

- 1996年, Harold P.Boas在文[15]中, 证明了一个很有趣的事实: 在适当的拓扑下, 所有的全纯陆启铿域(即该陆启铿域同时也是一个拟凸域)在拟凸域组成的空间中是一个无处稠密的集合. 这说明和我们的期望相反, 一个域的Bergman核函数具有零点是正常的情况.

- 1973年, Shozo Matsuura在[8]中证明所有中心在原点的有界完备圆型域都是陆启铿域. 1982年, Tadayoshi Kanemaru在文[7]中证明由M.Skwarczynski引进的域

$$D_p = \{z \in C^n : |z_1|^{2/p_1} + \cdots + |z_n|^{2/p_n} < 1\}(p_j \in N)$$

都是陆启铿域. 1979年, Shigeki Kakurai引用文[8] 的结果而在文[6]中得到结果"若D本身是有界单连通域而且是中心在原点的最小域(minimal domain), 则D是陆启铿域".

事实上上述文[6,7,8]中的这三个结果都不成立. 一个域称为完备圆型域是指若z是其内点, 则只要$|\lambda| < 1$那么λz也是其内点.
根据这个定义, 则域

$$D_p = \{z \in C^n : |z_1|^{2/p_1} + \cdots + |z_n|^{2/p_n} < 1\}(p_j \in N)$$

是完备圆型域. 事实上, 若$z \in D_p$, 即

$$|z_1|^{2/p_1} + |z_2|^{2/p_2} + \cdots + |z_n|^{2/p_n} < 1.$$

由于$|\lambda| = r < 1$, 因而$r^{2/p_j} < 1(j = 1, 2, \ldots, n)$. 所以有

$$r^{2/p_1}|z_1|^{2/p_1} + r^{2/p_2}|z_2|^{2/p_2} + \cdots + r^{2/p_n}|z_n|^{2/p_n} < 1.$$

此即

$$|rz_1|^{2/p_1} + |rz_2|^{2/p_2} + \cdots + |rz_n|^{2/p_n} < 1.$$

这就表明$\lambda z \in D_p$. 因而D_p是有界的完备圆型域.

- 上述Harold P.Boas, Siqi Fu, Emil J. Straube在文[16]中证明域$\{z \in C^2 : |z_1| + |z_2|^{2/p} < 1\}$当$p > 2$时其Bergman核函数有零点, 这就推翻了文[8]和文[7]的结果. 而上述, P.Pflug and E.H.Youssfi 在文[10]中的结果, 就是对文[6]的否定.

从上述可知，自从陆启铿猜想在1966年提出至今的40年中，有关陆启铿猜想方面的研究都是国外的数学家在进行. 2004年3月波兰数学家A.Edigarian和W.Zwonek证明了2维的对称化的多圆柱是陆启铿域[19]. 2005年末，保加利亚数学家N.Nikolov和波兰数学家W.Zwonek证明了大于2维的对称化的多圆柱不是陆启铿域[20]. 令D为单位圆盘，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n$，而$\pi_n = (\pi_{n,1}, \ldots, \pi_{n,n}) : C^n \to C^n$为如下定义的映射：

$$\pi_{n,k}(\lambda) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_k}, 1 \le k \le n.$$

则集合$G_n = \pi_n(D^n)$称为n维的对称化的多圆柱. G_n引起人们的注意是由于以下的一些有趣的性质:

1) G_n的Bergman核函数的显表达式可以求出来的[19];

2) G_n不可能双全纯等价于凸域，但是G_2上的Carath$\acute{e}$odory度量和Kobayashi度量是相同的[21-25] (当$n > 2$时，G_n上的Carath$\acute{e}$odory度量和Kobayashi度量是否相同并不清楚).

4 研究陆启铿猜想的思想和方法

讨论陆启铿问题没有统一的方法, 目前大致有以下几种:

1) Ramadanov 定理[26]: 若$\mathbb{C}^n$中域的序列$\{\Omega_j\}$满足

$$\Omega_j \subset \Omega_{j+1}, \quad \lim_{j\to+\infty} \Omega_j = \Omega,$$

则 域Ω_j的Bergman核$K_{\Omega_j}(z,w)$在$\Omega \times \Omega$的紧子集上一致收敛到Ω的Bergman核$K_\Omega(z,w)$.

应用Hurwitz定理, 立即可以得到如下结论: 若极限域的Bergman核 在$\Omega \times \Omega$上存在零点, 当j充分大(即Ω_j充分逼近Ω)时, 域Ω_j的Bergman核$K_{\Omega_j}(z,w)$必有零点.

2) 利用加权Bergman核[27]: 若G为C^n中的域, Ω是以G为底空间的Hartogs域, 即$\Omega = \{(z, z_{n+1} \in C^{n+1}, z \in G : |z_{n+1} < r(z)\}$, 这里$r(z)$是$G$上的正值函数, 则$\Omega$的Bergman 核函数限制于底空间$G$上, 就等于权为$\pi r^2$的$G$的加权Bergman核函数. 这样加权Bergman核函数的零点也就是比G更高维的域Ω的Bergman核函数的零点. 由加权Bergman核的理论也可以推出如下的紧缩原理.

3) 紧缩原理[16]: 设Ω是C^n中由不等式$\phi(z) < 1$所界定的域, 这里$\phi(z)$是在Ω的闭包的某一邻域连续的非负函数. 令K_1表示C_{n+2}中的域Ω_1的Bergman核函数, Ω_1由不等式$\phi(z) + |\zeta_1|^{2/p} + |\zeta_2|^{2/q} < 1$所界定, p与q都是正实数. 令K_2表示C^{n+1}中由不等式$\phi(z) + |\zeta|^{2/(p+q)} < 1$所界定的域$\Omega_2$的Bergman核函数. 则下述等式就称为紧缩原理:

$$\pi K_2(z, 0; w, 0) = \frac{\pi^2 \Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} K_1(z, 0, 0; w, 0, 0)$$

这点和上述第2点都用于给陆启铿猜想以反例.

4) 折选原理[16]: 设G与D都是C^n中的有界域, $F : G \longrightarrow D$是映G为D的阶为m的逆紧映照. 令$u := detF'$, 令$\Phi_1, \ldots, \Phi_m$表示定义于$D - V$上的F的m个局部的逆映照, 这里$V := \{F(z) : z \in G, u(z) = 0\}$. 再令$U_k := det\Phi'_k$.则G的Bergman核K_G与D的Bergman核K_D的变换公式为[46]:

$$\sum_{k=1}^{m} K_G(z, \Phi_k(w))\overline{U_k(w)} = u(z)K_D(F(z), w).$$

这可以用于讨论Bergman核函数有无零点的问题.

利用上述思想和方法讨论陆启铿问题的具体例子可见[3,15,16], 这里不赘述.

上述方法大体上只能应用于Bergman核函数已经求出来的情况下. 而绝大多数有界域的Bergman核函数的显表达式是求不出来的. 这种情况的陆启铿问题如何讨论, 尚无可行的思想和方法. 因此离彻底解决陆启铿问题还很远.

5 陆启铿猜想的新研究领域

到目前为止, 除了知道C^n中的有界齐性域都是陆启铿域之外, 人们都热衷于给陆启铿猜想以反例. 由于能求出Bergman核函数显表达式的域的类型很少, 因此陆启铿问题的研究就集中于蛋型域. 但是自1998年以来, 殷慰萍创建了Cartan-Hartogs域, Cartan-Egg域, 华罗庚域, 广义华罗庚域, 华罗庚结构等5类新的域(通称为华罗庚域), 而且它们的Bergman核函数的显表达式都已经求了出来[18], 这就为在华罗庚域上研究陆启铿问题奠定了基础, 这是陆启铿猜想的新研究领域. 这一节就叙述华罗庚域的陆启铿猜想, 其中最重要的一点就是把华罗庚域的Bergman核函数零点问题的讨论化为单复变量Z的实系数多项式(或者收敛的实系数无穷级数)在单位圆盘内的零点问题的讨论, 也可以通过变换$W=(1-Z)^{-1}$, 把单位圆盘化为W平面的通过点$(1/2,0)$垂直于实轴的直线的右半平面, 即区域$ReW>1/2$. 下面以第一类Cartan-Hartogs域为例进行说明, 其他类型的华罗庚域与此类似. 第一类Cartan-Hartogs域的定义为:

$$Y_I(N,m,n;K)=\{W\in C^N, Z\in R_I(m,n): |W|^{2K}<det(I-Z\overline{Z}^t), K>0\}.$$

其中$R_I(m,n)=\{Z\in C^{mn}: I-Z\overline{Z}^t>0\}$为第一类Cartan域, Z为m行n列的复矩阵.

其Bergman核函数为

$$K_I((W,Z);(\zeta,\xi)) = K^{-mn}\pi^{-(mn+N)}G(Y)det(I - Z\overline{\xi})^{-(m+n+N/K)}. \quad (5.1)$$

其中

$$G(Y) = \sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(N+i)Y^{N+i}, Y = (1-X)^{-1}, X = \sum_{j=1}^{N} W_j\overline{\zeta}_j(1 - Z\overline{\xi})^{-1/K}.$$

而$b_0 = 0$, 令

$$P(x) = (x+1)[(x+1+Kn)(x+1+K(n-1))\dots(x+1+K)]$$

$$[(x+1+K(n+1))(x+1+Kn)...(x+1+2K)]$$

$$\dots\dots[(x+1+K(n+m-1))(x+1+K(n+m-2))\dots(x+1+mK)]. \quad (5.2)$$

则其余$b_i(i = 1, 2, \dots\dots, n+1)$ 能由下列递推公式决定：

$$b_i = [P(-i-1) - \sum_{k=0}^{i-1} b_k(-1)^k\Gamma(i+1)/\Gamma(i-k+1)][(-1)^i\Gamma(i+1)]^{-1}. \quad (5.3)$$

Institute of Structural Mechanics
绪 论
理论分析. . .
数值仿真. . .
试验研究. . .
研究结论
附录: 侵彻方程
课题研究期间的相关成果
致 谢
访问主页
标题页
第 24 页 共 44 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

最近, 张利友把它改写为

$$b_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j P(-j-1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-j+1)}. \tag{5.4}$$

熟知, 对于第一类Cartan-Hartogs域, 存在全纯自同构变换$(W^*, Z^*) = F(W, Z)$把该域中的点(W, Z_0)映为点$(W^*, 0)$, 因而在变换F下, 核函数$K_I((W, Z); (\zeta, \xi))$就变为

$$K_I((W, Z); (\zeta, \xi)) = (detF'(W, Z))|_{Z_0=Z} K_I[(W^*, 0), (\zeta^*, 0)](det\overline{F'(\zeta, \xi)}).$$

因此核函数$K_I((W, Z); (\zeta, \xi))$的零点就和$K_I[(W^*, 0), (\zeta^*, 0)]$的零点完全一样. 为方便起见, 改写$W^*$为$W$, ζ^*为ζ, 这时

$$K_I[(W, 0), (\zeta, 0)] = K^{-mn}\pi^{-(mn+N)}G(Y). \tag{5.5}$$

其中

$$G(Y) = \sum_{i=0}^{mn+1} b_i \Gamma(N+i) Y^{N+i}, Y = (1 - \sum_{j=1}^{N} W_j \overline{\zeta}_j)^{-1}. \tag{5.6}$$

对于下面的讨论, 要注意两个基本的事实:

1) 由于$(W, 0)$和$(\zeta, 0)$以及$(W^*, 0)$和$(\zeta^*, 0)$都是第一类Cartan-Hartogs域的内点, 因此他们的模$|W|, |\zeta|, |W^*|, |\zeta^*|$ 都小于1.

2) Bergman核函数的对角形式总大于零, 即$K_I((W, Z); (W, Z)) > 0$.

这样, 令$t=\sum_{j=1}^{N}W_j\overline{\zeta}_j$, 则$t$为复数, 而且$|t|<1$, 由于$Y=(1-t)^{-1}$, 因而$|t|<1$就变为$Y-$平面上的通过点$(1/2,0)$垂直于实轴的直线的右半平面, 即变为区域$ReY>1/2$. 因此(5.6)中的$G(Y)$就变为

$$G(Y)=Y^{N+1}\sum_{i=1}^{mn+1}b_i\Gamma(i+N)Y^{i-1}=Y^{mn+N+1}\sum_{i=1}^{mn+1}b_i\Gamma(i+N)(1-t)^{mn-i+1}.$$

令

$$f(Y)=\sum_{i=1}^{mn+1}b_i\Gamma(i+N)Y^{i-1},g(t)=\sum_{i=1}^{mn+1}b_i\Gamma(i+N)(1-t)^{mn-i+1}. \quad (5.7)$$

则$Y_I(N,m,n;K)$的Bergman核函数的零点问题的讨论就归结为单复变数多项式$g(t)$在单位圆盘内的零点问题的讨论; 或者归结为单复变数多项式$f(Y)$在$Y-$平面上的通过点$(1/2,0)$垂直于实轴的直线的右半平面, 即$ReY>1/2$, 内的零点问题的讨论. 把这个论断写为定理就是:

定理A: 第一类Cartan-Hartogs域为陆启铿域的充要条件为$g(t)$的所有根都位于$|t|\geq 1$, 或者等价于

第一类Cartan-Hartogs域为陆启铿域的充要条件为$f(Y)$的所有根都位于$ReY\leq 1/2$.

首先利用定理的第一种叙述, 考虑最简单的3种情况: $N=m=1$时, $n=1,2,3$.

Institute of Structural Mechanics

- 5.1. $Y_I(1,1,1;K)$是陆启铿域

当$N = m = n = 1$时, 此时的Cartan-Hartogs域$Y_I(1,1,1;K) = \{W \in C, Z \in C : |W|^{2K} + |Z|^2 < 1\}$, 相应于(5.7)的

$$g(t) = b_1(1-t) + 2b_2.$$

而根据(5.3)可计算得到$b_1 = K-1, b_2 = 1$, 因而$g(t) = K+1-t(K-1)$, 其零点为$(K+1)/(k-1) > 1$, 不在单位圆盘内, 因此$Y_I(1,1,1;K)$的Bergman核函数无零点, 即$Y_I(1,1,1;K)$是陆启铿域.

设$D \subset \mathbf{C^2}$ 是具有实解析边界的拟凸域, 若其全纯自同构群不紧致, 则基于Bedford和Pinchuk的下述定理, 由上述结果也证明了D一定是陆启铿域.

Bedford-Pinchuk 定理[17]: 设$D \subset \mathbf{C^2}$ 是具有实解析边界的拟凸域, 若其全纯自同构群不紧致, 则D 双全纯等价于以下形式的域

$$E_m = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C^2} : |z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\},$$

其中m为某个正整数.

- 5.2. $Y_I(1,1,2;K)$是否为陆启铿域

$N=m=1, n=2$时, 此时的Cartan-Hartogs域$Y_I(1,1,2;K)=\{W\in C, Z\in C^2 : |W|^{2K}+|Z|^2<1\}$, 相应于(5.7)的

$$g(t)=b_1(1-t)^2+2b_2(1-t)+6b_3.$$

而根据(5.3)可计算得到$b_1=(K-1)(2K-1), b_2=3(K-1), b_3=1$,因此$g(t)$的零点为

$$t=\frac{b_1+b_2\pm\sqrt{b_2^2-6b_1b_3}}{b_1}. \tag{5.8}$$

注意到上式右端为实数时, 由于基本事实2), 因此右端的值只能在$(-1,0)$之中, 当右端为复数时, 由于基本事实1), 右端的绝对值只能小于1. 下面分别对$K>0$的不同情况进行分析. 经计算(5.8)式为

$$t=\frac{b_1+b_2\pm\sqrt{b_2^2-6b_1b_3}}{b_1}=\frac{2(K-1)(K+1)\pm\sqrt{-3(K-1)(K+1)}}{(K-1)(2K-1)}. \tag{5.9}$$

它必须在$(-1,0)$之中才有意义.

- 当$0 < K < 1/2$时

要求(5.9)式在$(-1, 0)$之中, 即要求

$$-1 < \frac{2(K-1)(K+1) \pm \sqrt{-3(K-1)(K+1)}}{(1-K)(1-2K)} < 0. \qquad (5.10)$$

上式右端只要$0 < K < 1/2$总成立. 上式左端成立就要求有

$$(1-K)(4K+1) < \pm\sqrt{3(1-K^2)}.$$

取”−”号时不成立, 取”+”号时, 要求有

$$(1-K)(4K+1) < \sqrt{3(1-K^2)}.$$

此即要求有$16(K-1/2)^2(K+1/2) > 0$,这当然成立. 因此当$0 < K < 1/2$时, $Y_I(1,1,2;K)$的Bergman核函数有零点, 它不是陆启铿域. 其零点为

$$t = W\bar{\zeta} = \frac{2(K-1)(K+1) + \sqrt{-3(K-1)(K+1)}}{(1-K)(1-2K)}.$$

Institute of Structural Mechanics

访问主页
标题页
返　回
全屏显示
关　闭
退　出

把$W\bar{\zeta}$恢复到原来的$W^*\overline{\zeta^*}$, 并注意到W^*和ζ^*是W和ζ在F下的像, 这样

$$W\bar{\zeta}(1-Z\bar{\xi})^{-1/K}=\frac{2(K-1)(K+1)+\sqrt{-3(K-1)(K+1)}}{(1-K)(1-2K)}$$

是当$0<K<1/2$时$Y_I(1,1,2;K)$的Bergman核函数的零点的集合. 以往只对Bergman核函数有无零点进行定性研究, 这里把零点的集合具体求了出来, 这在以往是很罕见的.

- 当$K=1/2$时

此时的$g(t)=2b_2(1-t)+6b_3=-3(1-t)+6$. 其零点为$t=-1$, 即$W\bar{\zeta}=-1$, 根据第一个基本事实这是不可能的. 因此, 当$K=1/2$时, $Y_I(1,1,2;K)$的Bergman核函数无零点.

- 当$1/2<K<1$时

此时的$g(t)=b_1(1-t)^2+2b_2(1-t)+6b_3$,
而$0<|1-t|<2$, 因此

$$|g(t)|>6-4|b_1|-4|b_2|=6-4(1-K)(2K-1)-12(1-K)=2(2K-1)(2K+1)>0.$$

这表示此时$g(t)$无零点. 因而当$1/2<K<1$时, $Y_I(1,1,2;K)$的Bergman核函数无零点. 而当$K=1$时, $Y_I(1,1,2;K)$是超球, 当然是陆启铿域.

- 当$1 < K < +\infty$时

此时$g(t)$的零点为

$$t = \frac{b_1 + b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 6b_1b_3}}{b_1} = \frac{2(K-1)(K+1) \pm \sqrt{-1}\sqrt{3(K-1)(K+1)}}{(K-1)(2K-1)}.$$

但其实部为

$$\frac{2K+2}{2K-1} > 1.$$

这与第一个基本事实不符，这表明当$1 < K < \infty$时，$Y_I(1,1,2;K)$的Bergman核函数无零点.

- 综上所述，当$0 < K < 1/2$时，$Y_I(1,1,2;K)$不是陆启铿域，这也是文[7,8]的一个反例而且其Bergman核函数的零点的集合也具体的求了出来；当$1/2 \le K < +\infty$时，$Y_I(1,1,2;K)$是陆启铿域.

- 5.3. $Y_I(1,1,3;K)$是否为陆启铿域

当$N=m=1, n=3$时, 此时的Cartan-Hartogs域$Y_I(1,1,3;K)=\{W\in \mathbf{C}, Z\in \mathbf{C^3}: |W|^{2K}+|Z|^2<1\}$. 相应于(5.7)的

$$g(t)=b_1(1-t)^3+2b_2(1-t)^2+6b_3(1-t)+24b_4.$$

根据(5.3)计算得到$b_1=(K-1)(2K-1)(3K-1), b_2=(K-1)(11K-7), b_3=6(K-1), b_4=1$.因而

$$g(t)=(K+1)(2K+1)(3K+1)-(K-1)(K+1)(18K+11)t$$

$$+(K-1)(K+1)(18K-11)t^2-(K-1)(2K-1)(3K-1)t^3.$$

当$0<K<\frac{\sqrt{2}}{2}$时:
此时$g(0)=(K+1)(2K+1)(3K+1)>0$, 而$g(-1)=48K(K-\frac{\sqrt{2}}{2})(K+\frac{\sqrt{2}}{2})<0$. 这说明$g(t)$在$(0,1)$间至少有一个零点. 因此, 此时的$Y_I(1,1,3;K)$不是陆启铿域.

- 当$\frac{\sqrt{2}}{2} < K \leq 1$时

此时$|g(t)| \geq [(K+1)(2K+1)(3K+1)-(1-K)(K+1)(18K+11)-(1-K)(K+1)(18K-11)-(1-K)(2K-1)(3K-1)] = 24K(2K^2-1) > 0$.
因而此时$Y_I(1,1,3;K)$是陆启铿域.

- 当$K > 1$ 时

此时$g(1) = (K+1)(2K+1)(3K+1)-(K-1)(K+1)(18K+11)+(K-1)(K+1)(18K-11)-(K-1)(2K-1)(3K-1) = 24 > 0$, 而
$g(\frac{K+1}{K-1}) = \frac{2(K+1)}{(K-1)^2}[(K+1)^2(6K^2-12K+5)-(K-1)^2(6K^2+12K+5)]$,
$[(K+1)^2(6K^2-12K+5)-(K-1)^2(6K^2+12K+5)] < 0$,
故$g(\frac{K+1}{K-1}) < 0$.
因此$g(t)$ 在$(1,\frac{K+1}{K-1})$ 有零点t_1.
设其另外两个零点为t_2 和t_3. 由于$g(t)$是3阶的实系数多项式, 故只存在以下两种情况:
1) t_2, t_3 相互共轭;
2) t_2, t_3 都是实数.

Institute of Structural Mechanics

根据根与系数的关系，有$t_1t_2t_3 = \frac{(K+1)(2K+1)(3K+1)}{(K-1)(2K-1)(3K-1)}$. 由于$t_1 < \frac{K+1}{K-1}$，因而有$t_2t_3 > \frac{(2K+1)(3K+1)}{(2K-1)(3K-1)} > 1$. 因此第一种情况下，$t_2, t_3$ 的模都比1大，这与5.1之前所述的基本事实1相矛盾. 在情况2时，由于t_2, t_3 不可能是负实数再由于5.1之前所述的基本事实2，t_2, t_3 不可能在[0,1)中. 因此$t_2 > 1$ and $t_3 > 1$，都与5.1之前所述的基本事实1相矛盾. 故此时$Y_I(1,1,3;K)$是陆启铿域.

综上所述，当$0 < K < \sqrt{2}/2$时，$Y_I(1,1,3;K)$ 不是陆启铿域;当$\sqrt{2}/2 \le K < +\infty$ 时，$Y_I(1,1,3;K)$ 是陆启铿域.

- 设$D \subset \mathbf{C}^3 (\subset \mathbf{C}^4)$ 是具有实解析边界的拟凸域而且其Levi形式的秩至少是2(3)，若其全纯自同构群不紧致，则基于Bedford和Pinchuk的下述定理，由上述结果也证明了D一定是陆启铿域.

Bedford-Pinchuk 定理[18]: 设$D \subset \mathbf{C}^{\mathbf{n}+1}$ 是具有实解析边界的拟凸域而且其Levi形式的秩至少是$n-1$，若其全纯自同构群不紧致，则D 双全纯等价于以下形式的域

$$E_m = \{(w, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{n+1}} : |w|^{2m} + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\},$$

其中m为某个正整数.

- 综上所述，当$0 < K < \sqrt{2}/2$时，$Y_I(1,1,3;K)$ 不是陆启铿域; 当$\sqrt{2}/2 \le K < +\infty$ 时，$Y_I(1,1,3;K)$ 是陆启铿域.

访问主页
标题页
第 34 页 共 44 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

也可以利用定理A的第二种叙述来进行论证, 这可以参见F.Z.Demmad的论文[30].

同样可以和上面一样考虑第2-6类的Cartan-Hartogs域的Bergman核函数的零点问题, 也可以得到相应于$f(Y), g(t)$ 的实系数多项式$f_j(Y), g_j(t)(j = 2, 3, \ldots, 6)$, 而分别考虑他们在$ReY > 1/2$和$|t| < 1$内的零点问题. 这归结为单复变的问题. 对于次数为1,2,3,4的多项式, 利用文献[29]中第5章所叙述的方法都可以解决其零点问题的讨论. 难点是对一般的n如何考虑?

6 陆启铿猜想的Open Problems

陆启铿问题是研究C^n中有界域D的Bergman核函数的零点问题. 因而由于域D的不同, 其Bergman核函数也不同. 而互不全纯等价的不可约的有界域有无穷多个, 其集合的势等于连续统的势. 同样相应的Bergman核函数的集合的势也相当于连续统的势. 但是总共分为三类: A. 域的Bergman核函数的显表达式是初等函数或是初等函数的有限的组合, 例如Cartan域, 有界齐性域, Cartan-Hartogs域, Cartan-Egg域; B. 域的Bergman核函数是无穷级数的形式, 例如大部分的Egg域和大部分的华罗庚域和大部分的华罗庚结构; C. 域的Bergman核函数虽然存在但是其显表达式求不出来, 这种情况占绝大多数, 因为能够显式给出Bergman核函数的域是很罕见的.

目前对陆启铿问题的讨论集中于前两类. 对第三类尚无好的方法, 通常应当寻找陆启铿域的特征性质, 或者说寻找陆启铿域的充要条件. 人们猜测这个特征性质应当从域的几何性质中去寻找, 这就应当建筑在对较多的具体的陆启铿域和非陆启铿域的分析上. 对前两类的研究会起到这种作用. 而且相对而言, 第一类较容易, 第二类很困难, 其难度根据Boas的看法相当于解决Riemann猜想的难度, 第三类目前还无从下手. 由此可见, 陆启铿问题一时很难全部解决, 但总有难度不同的问题可以研究. 因此陆启铿猜想是一个很好的研究领域. 下面把所提出的Open Problems罗列起来以飨读者.

1) 熟知, 复数平面C中边界光滑的有界域为陆启铿域的充要条件是该域是单连通的[14], 而且对任何$k>2$, 在C中总存在一个k连通域不是陆启铿域[12].

问题: 给出复数平面C中的无限连通域为陆启铿域的充要条件[3].

2) Nguyên Viêt Anh证明如下定义的域在k充分大时其Bergman核函数必有零点[5]:

$$\{|z_2|^{2k}(1+|z_1|)^{2k}+|z_2|^{2k}(1-|z_1|)^{2k}+\left(\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{k}\right)^k<1.\}$$

问题: 求出使得上述域的Bergman核函数有零点的最小的k[3].

3) 设G是C^n中的包含原点的有界域, $K_t(z,w)$表示G的以$exp(-t|z|)$为权的Bergman核函数, Miroslav Engliš证明当t充分大时$K_t(z,w)$在原点附近必有零点[28].

问题：t到底多大就能保证加权Bergman 核函数有零点[3]?

4) 由于对于任意的$n>2$总存在C^n中的有界凸域使得其Bergman核函数有零点[11,16].

问题：是否存在C^2中的有界凸域使得其Bergman核函数有零点[3]?

5) 问题：正数组成的一组数$(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 具有何种特征才能使得如下的域的Bergman核函数无零点：

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n : |z_1|^{2p_1} + \dots + |z_n|^{2p_n}\}[3].$$

6) 如第5节所述, 第一类Cartan-Hartogs域的Bergman核函数零点的讨论就归结为(5.7)中的

$$g(t) = \sum_{i=1}^{mn+1} b_i \Gamma(i+N)(1-t)^{mn-i+1}$$

在$|t| < 1$内零点的讨论, 或者归结为

$$f(Y) = \sum_{i=1}^{mn+1} b_i \Gamma(i+N) Y^{i-1}$$

在Y-平面上$ReY > 1/2$内的零点的讨论, 其中b_j见(5.3)或(5.4).

问题：K在什么范围使得$g(t)$(或$f(Y)$)在所讨论的区域内有零点或无零点？

同样可以讨论Cartan-Hartogs域的其他类型的域的Bergman核函数零点的问题,

也可以研究各类Cartan-Egg域, 华罗庚域, 广义华罗庚域, 华罗庚结构的Bergman核函数的零点问题.

Institute of Structural Mechanics

- **注记**

1. 当$N=m=1$时, 第一类Cartan-Hartogs域就变成$Y_I(1,1,n;K)$, 其相应的

$$P(x)=(x+1)[(x+1+Kn)(x+1+K(n-1))\dots(x+1+K)],$$

$$b_i=\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^jP(-j-1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-j+1)}.$$

$i=1,2,\dots\dots,n+1.$

$$f(Y)=\sum_{i=1}^{n+1}b_i\Gamma(i+1)Y^{i-1}.$$

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n+1}b_i\Gamma(i+1)(1-t)^{n+1-i}$$

$Y_I(1,1,n;K)$的Bergman核函数零点的讨论就化为n次实系数多项式$g(t)$在单位圆盘$|t|<1$内部的零点问题, 或者n次实系数多项式$f(Y)$在半平面$ReY>1/2$内的零点问题的讨论. 就完全归结为一个单复变的问题. 此问题的讨论可以利用文献[29]所述之"Descartes' Rule of Signs", "Fourier-Budan Method"以及"Sturm's Method" 等方法. 但是也只对次数较低的实系数多项式才有效, 对一般的n次的多项式如何考虑尚是一个问题, 期待着人们去攻克.

- 2. 因此从现在的情况而言, 可以认为陆启铿问题的彻底解决非常困难, 可能将永远讨论不完. 但总有难度不同的问题可以研究. 因此陆启铿猜想是一个很好的研究课题.
- **欢迎研究陆启铿猜想!**
- **欢迎研究华罗庚域!**

谢　谢!

Thank You!

参考文献

[1] 陆启铿. 关于常曲率的Kahler流形. 数学学报, 1966, 16(2): 269-281.

[2] M.Skwarczynski. The distance in theory of pseu-conformal transformations and the lu Qi-keng conjecture . Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22: 305-310.

[3] Harold P.Boas. Lu Qi-keng's problem. J.Korean Math. Soc.,2000,37(2): 253-267.

[4] 陆启铿. 多复变函数与酉几何. 数学进展,1956, 2: 587-662.

[5] Nguyên Viêt Anh. The Lu Qi-Keng conjecture fails for strongly convex algebraic complete reihardt domains C^n $(n \geq 3)$. Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128(6): 1729-1732.

[6] Shigeki Kakurai. On the Lu qi-Keng conjecture. Rep. Fac. Engrg. Kanagawa Univ., 1979,No.17:3-4.

[7] Tadayoshi Kanemaru. A remark on the Lu Qi Keng conjecture. Mem.Fac.Ed. Kumamoto Univ.Natur.Sci., 1982, No.31:1-3.

[8] Shozo Matsuura. On the Lu Qi-Keng conjecture and the Bergman representative domains. Pacific J. Math., 1973, 49: 407-416.

Institute of Structural Mechanics

[9] Miroslav Engliš. Zeroes of the Bergman kernel of Hartogs domains. Comment. Math. Univ. carolin., 2000, 41(1): 199-202.

[10] P.Pflug, E.H.Youssfi. The Lu Qi-Keng conjecture fails for strongly convex algebraic domains. Arch. Math.(Basel), 1998, 71(3):240-245.

[11] K.Oeljeklaus, P.Pflug, E.H.Youssfi. The Bergman kernel of the minimal ball and applications. 1997, Ann.Inst.Fourier(Grenoble). 1997, 47(3):915-928.

[12] Paul Rosenthal. On the zeros of the Bergman function in doubly-connected domains. Proc. Amer. Soc.,1969, 21: 33-35.

[13] Harold P. Boas. Counterexample to the Lu Qi-Keng conjecture. Proc. Amer. Soc., 1986, 97(2): 374-375.

[14] Nobuyuki Suita, Akira Yamada. On the Lu Qi-keng conjecture. Proc. Amer. Soc., 1976, 59(2): 222-

[15] Harold P. Boas. The Lu Qi-Keng conjecture fails generically. Proc. Amer. Soc., 1996, 124(7): 2021-2027.

[16] Harold P. Boas, Siqi Fu, and Emil J.Straube. The Bergman kernel functions: explicit formulas and zeroes. Proc. Amer. Math. Soc., 1999, 127(3): 805-

[17] E.Bedford, S.I.Pinchuk. Domains in $\mathbf{C}^2$ with noncompact group of automorphism. (Russian) Mat.Sb., 1988, 135: 147-157; (English) Math. USSR Sbornik, 1989, 63:141-151.

[18] 殷慰萍. 嘉当域到华罗庚域. 北京: 首都师范大学出版社, 2003.

[19] A.Edigarian, W.Zwonek. Geometry of the symmetrized polydisc, arch. Math., 2005, 84: 364-374.

[20] N.Nikolov, W.Zwonek. The Bergman kernel of the symmetrized polydisc in higher dimensions has zeros, arXiv: math.CV/0511482.

[21] C.Costara. Dissertation, Universite Laval(2004).

[22] C.Costara. The symmetrized bidisc and Lempert's theorem, Bull. london Math. Soc., 2004, 36:656-662.

[23] J.Agler, N.J.Young. The hyperbolic geometry of the symmetrized bidisc, J.Geom.Anal.,2004, 14: 375-403.

[24] M.Jarnicki, P.Pflug. Invariant distances and metrics in complex analysis-revisited, Diss.Math., 2005, 430:1-192.

[25] N.Nikolov. the symmetrized cannot be exhausted by domains biholomorphic to convex domains, arXiv: math.CV/0507190.

[26] I.P.Ramadanov, Sur une propriete de la fonction de Bergman, C.R. Acad. Bulgare Sci. 1967, 20: 759-762.

[27] Ewa Ligocka. on the Forelli-Rudin construction and weighted Bergman projections, Studia Math., 1989, 94(3): 257-272.

[28] Miroslav Englič. Asymptotic behaviour of reproducing kernels of weighted Bergman spaces, Trans. Amer.Math.Soc.,1997, 349(9): 3717-3735.

[29] E.J.Barbeau. Polynomials, New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

[30] F.Z.Demmad. Polynôme de Hua, noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs et pr