

漫谈偏微分方程的学习与研究

李大潜

常微分方程

- 未知函数是一元函数

包含未知函数的某些导数的方程.



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解 $y = y(x)$ 的意义.

常微分方程

- 未知函数是一元函数

包含未知函数的某些导数的方程.



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解 $y = y(x)$ 的意义.

常微分方程

- 未知函数是一元函数

包含未知函数的某些导数的方程.



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 解 $y = y(x)$ 的意义.

偏微分方程

- 未知函数是多元函数

包含未知函数的某些偏导数的方程.

•

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplace方程)}$$

- 解 $u = u(x, y)$ 的意义.

偏微分方程

- 未知函数是多元函数

包含未知函数的某些偏导数的方程.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplace 方程)}$$

- 解 $u = u(x, y)$ 的意义.

偏微分方程

- 未知函数是多元函数

包含未知函数的某些偏导数的方程.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplace 方程)}$$

- 解 $u = u(x, y)$ 的意义.

- 常微分方程

一元微积分

- 偏微分方程

多元微积分

- 常微分方程

一元微积分

- 偏微分方程

多元微积分

常微分方程

- 特解与通解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0 : y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

常微分方程

- 特解与通解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0 : y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

常微分方程

- 特解与通解.
- 存在唯一性定理:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ x = x_0 : y = y_0. \end{cases}$$

- 共性.

偏微分方程

研究集中在少数特殊类型的偏微分方程:

椭圆型方程:

Laplace方程 $\Delta u = 0$

$$(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}),$$

- 双曲型方程:

波动方程: $u_{tt} = \Delta u$,

- 抛物型方程:

热传导方程 $u_t = \Delta u$,

- 双曲型方程:

波动方程: $u_{tt} = \Delta u,$

- 抛物型方程:

热传导方程 $u_t = \Delta u,$

偏微分方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$

- 一般性结论极少

- 个性突出

偏微分方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$

- 一般性结论极少

- 个性突出

偏微分方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^3 = 0.$
- 一般性结论极少
- 个性突出

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景 $\implies$ 不同类型的方程 $\implies$ 不同的特性 $\implies$ 不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵, 揭示问题的本质.

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景 $\implies$ 不同类型的方程 $\implies$ 不同的特性 $\implies$ 不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵, 揭示问题的本质.

重视个性的原因

- 复杂性
- 不同的物理来源与背景 $\implies$ 不同类型的方程 $\implies$ 不同的特性 $\implies$ 不同的提法及解法
- 分门别类的研究才能展示丰富的内涵, 揭示问题的本质.

经典数学物理方程范围不断扩大:

Maxwell方程组

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_f, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f \end{cases}$$

其中

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E},$$

$$\operatorname{div} \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0.$$

Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \text{grad} \rho = \mathbf{F}, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

理想可压缩流体力学方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{F} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{e} + \frac{1}{2} \rho u^2) + \operatorname{div}((\rho \mathbf{e} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

其中

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T).$$

● 弹性动力学方程组

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

● Schrödinger方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

● KdV方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

.....

● 弹性动力学方程组

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

● Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

● KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

.....

● 弹性动力学方程组

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

● Schrödinger方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

● KdV方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

.....

结合一些重要的物理模型，对偏微分方程的某些特殊类型开展深入的研究，将是很长一段时期中偏微分方程发展的特点和主流；呈现出强烈的个性，将会一直是偏微分方程研究的一个重要的特征。

波动方程

- 声波, 电磁波(光波), 弹性波,
- 信息通讯(手机), 石油勘探与开发, 半导体器件, 电子显微镜, 激光制导,
- 正因为具有明显的个性, 才反映了各种波动现象的共性, 从而有广泛的应用。

波动方程

- 声波, 电磁波(光波), 弹性波,
- 信息通讯(手机), 石油勘探与开发, 半导体器件, 电子显微镜, 激光制导,
- 正因为具有明显的个性, 才反映了各种波动现象的共性, 从而有广泛的应用。

波动方程

- 声波, 电磁波(光波), 弹性波,
- 信息通讯(手机), 石油勘探与开发, 半导体器件, 电子显微镜, 激光制导,
- 正因为具有明显的个性, 才反映了各种波动现象的共性, 从而有广泛的应用。

Laplace方程 $\Delta u = 0$

及

Poisson 方程 $\Delta u = f(x)$

涉及

稳定温度场,

静磁场,

定常扩散现象,

流体力学,

静电场,

柱形杆的扭转,

稳定电流的电场,

势论等

自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程的“惊人的类似”中。“用同一方程式可以解决流体力学的问题，也可以表达势论。……”

—列宁《唯物主义和经验批判主义》

- 电动力学：Maxwell方程及其应用。
- 弹性力学：弹性力学方程组及其应用
- 非相对论量子力学：Schrödinger方程及其应用。

- 电动力学：Maxwell方程及其应用。
- 弹性力学：弹性力学方程组及其应用
- 非相对论量子力学：Schrödinger方程及其应用。

- 电动力学：Maxwell方程及其应用。
- 弹性力学：弹性力学方程组及其应用
- 非相对论量子力学：Schrödinger方程及其应用。

- 这些基本方程的建立，是在很多物理、力学观察及实验的基础上，主要由物理学家、力学家完成的。
- 一旦建立了这些基本方程，剩下的任务就是根据需要在各种特殊情况下求解这些方程，并阐明其解的物理、力学本质与内涵。
- 不少自然科学学科的数字化趋势。
- 李大潜，秦铁虎，“物理学与偏微分方程”(上、下册)

- 这些基本方程的建立，是在很多物理、力学观察及实验的基础上，主要由物理学家、力学家完成的。
- 一旦建立了这些基本方程，剩下的任务就是根据需要在各种特殊情况下求解这些方程，并阐明其解的物理、力学本质与内涵。
- 不少自然科学学科的数字化趋势。
- 李大潜, 秦铁虎, “物理学与偏微分方程”(上、下册)

- 这些基本方程的建立，是在很多物理、力学观察及实验的基础上，主要由物理学家、力学家完成的。
- 一旦建立了这些基本方程，剩下的任务就是根据需要在各种特殊情况下求解这些方程，并阐明其解的物理、力学本质与内涵。
- 不少自然科学学科的数字化趋势。
- 李大潜, 秦铁虎, “物理学与偏微分方程”(上、下册)

- 这些基本方程的建立，是在很多物理、力学观察及实验的基础上，主要由物理学家、力学家完成的。
- 一旦建立了这些基本方程，剩下的任务就是根据需要在各种特殊情况下求解这些方程，并阐明其解的物理、力学本质与内涵。
- 不少自然科学学科的数字化趋势。
- 李大潜，秦铁虎，“物理学与偏微分方程”(上、下册)

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\Delta u = 0$: $\frac{1}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$: $\frac{\delta(r-t)}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
-

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\Delta u = 0$: $\frac{1}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$: $\frac{\delta(r-t)}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$

.....

基本解

以单位脉冲为源所得的解

- 三维 $\Delta u = 0$: $\frac{1}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
- 一维 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}$
- 三维 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$: $\frac{\delta(r-t)}{4\pi r} \quad (r = r(x_0, x))$
-

线性PDEs的解均可通过基本解的迭加而得到.

知道了基本解, 就掌握了这类方程解的一切必要的信息.

- Jacques Hadamard (1865–1963)
- 吴新谋
- 技术上的困难

线性PDEs的解均可通过基本解的迭加而得到.

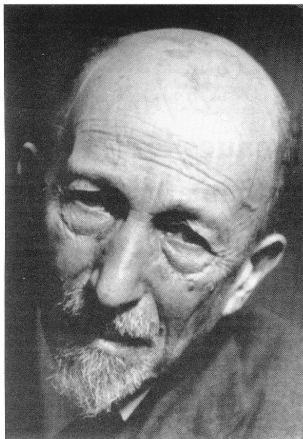
知道了基本解, 就掌握了这类方程解的一切必要的信息.

- Jacques Hadamard (1865–1963)
- 吴新谋
- 技术上的困难

线性PDEs的解均可通过基本解的迭加而得到.

知道了基本解, 就掌握了这类方程解的一切必要的信息.

- Jacques Hadamard (1865–1963)
- 吴新谋
- 技术上的困难



A handwritten signature of Jacques Hadamard in cursive script.

Jacques Hadamard
1865-1963

偏微分方程的解

- 传统的理解：局部化的方式。
- 能否转换为整体化的方式？

偏微分方程的解

- 传统的理解：局部化的方式。
- 能否转换为整体化的方式？

函数:

在区间 $(0, 1)$ 上的函数 $y = f(x)$:

$x \in (0, 1) \longrightarrow y = f(x)$ (局部化的定义).

- $\forall \varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ (试验函数),

$$(f, \varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx \quad (\text{整体化的定义}).$$

- 若 f 连续, 二定义等价.

函数:

在区间 $(0, 1)$ 上的函数 $y = f(x)$:

$x \in (0, 1) \longrightarrow y = f(x)$ (局部化的定义).

- $\forall \varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ (试验函数),

$$(f, \varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx \quad (\text{整体化的定义}).$$

- 若 f 连续, 二定义等价.

- 等号两边并不完全相等:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- 二个相互等价的定义并不全同:

$$f \in L^1(0, 1), \quad \text{几乎处处定义.}$$

δ 函数:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

而

$$\int \delta(x) dx = 1.$$

- 等号两边并不完全相等:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- 二个相互等价的定义并不全同:

$$f \in L^1(0, 1), \quad \text{几乎处处定义.}$$

δ 函数:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

而

$$\int \delta(x) dx = 1.$$

对函数概念认识的飞跃:

- J. Leray,

Sobolev

- L. Schwartz,

- 分布论

对函数概念认识的飞跃:

- J. Leray,

Sobolev

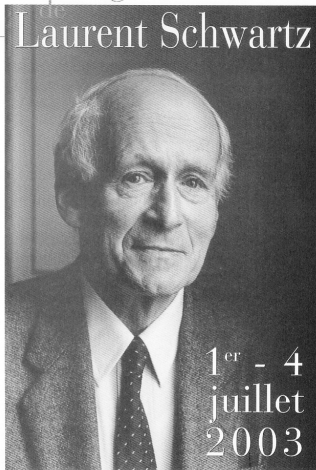
- L. Schwartz,

- 分布论

对函数概念认识的飞跃:

- J. Leray,
Sobolev
- L. Schwartz,
- 分布论

Hommage à la mémoire de Laurent Schwartz



à l'École polytechnique Palaiseau, FRANCE

Renseignement : Centre de Mathématiques
École polytechnique - 91128 Palaiseau cedex - France

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

解 $u = u(x)$

- 局部化的理解.

- 整体化的理解:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0,$$

$\forall \varphi$ 适当光滑, $\varphi|_{\Gamma} = 0$.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

解 $u = u(x)$

- 局部化的理解.
- 整体化的理解:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0,$$

$\forall \varphi$ 适当光滑, $\varphi|_{\Gamma} = 0$.

对 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, 二者等价.

但后者可拓展到 $u \in H_0^1(\Omega) = \{u | u, Du \in L^2(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$.

- 泛函分析方法、Sobolev空间理论进入了偏微分方程.
- 利用分布论, 基本解可以很好的描述与处理.

对 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, 二者等价.

但后者可拓展到 $u \in H_0^1(\Omega) = \{u | u, Du \in L^2(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$.

- 泛函分析方法、Sobolev空间理论进入了偏微分方程.
- 利用分布论, 基本解可以很好的描述与处理.

- Schwartz当年的预言.

- 线性 $\longrightarrow$ 非线性:

更强的个性, 更大的活动空间, 更多的
机遇与挑战.

当代PDEs的前沿和主流.

- Schwartz当年的预言.

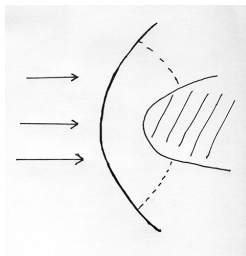
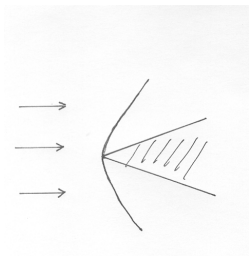
- 线性 $\longrightarrow$ 非线性:

更强的个性, 更大的活动空间, 更多的
机遇与挑战.

当代PDEs的前沿和主流.

一. 要重视物理模型的驱动

● 超音速绕流问题



理想可压缩流体力学方程组: 拟线性

超音速流动 $\implies$ 双曲型

亚音速流动 $\implies$ 椭圆型

绕流物面上有边界条件.

激波面为自由边界.

音速面也是自由边界.

发展趋势:

方程——→方程组

线性——→非线性(拟线性)

给定边界——→自由边界

局部——→整体

低维——→高维

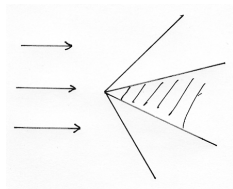
定型——→变型

研究工作的切入点:
超音速尖头体的平面无旋定常等熵
绕流的局部解

排除了高维、整体、变型,
但仍保留了拟线性、自由边界.

二变数拟线性双曲组的自由边界问题的局部解

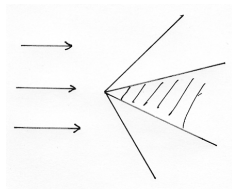
- 楔形情况



- 曲边界情况

二变数拟线性双曲组的自由边界问题的局部解

- 楔形情况



- 曲边界情况

- **Cauchy问题:**

A. Douglis (1952).

P. Hartman & A. Wintner (1952)

P. D. Lax (1954)

R. Courant & P. D. Lax (1955)

R. Courant (1961)

- R. Courant & K. O. Friedrichs

“Supersonic flow and shock wave”

(1948).

- **Cauchy问题:**

A. Douglis (1952).

P. Hartman & A. Wintner (1952)

P. D. Lax (1954)

R. Courant & P. D. Lax (1955)

R. Courant (1961)

- R. Courant & K. O. Friedrichs
“Supersonic flow and shock wave”
(1948).

- 利用速度图变换,
特征线参数方法,

实现将自由边界化为给定边界,
消除中心波的多值性奇点.

用简单的迭代法得到局部解(1960–1961)

- D. G. Schaeffer (1976): Nash-Moser迭代

- 利用速度图变换,
特征线参数方法,

实现将自由边界化为给定边界,
消除中心波的多值性奇点.

用简单的迭代法得到局部解(1960–1961)

- D. G. Schaeffer (1976): Nash-Moser迭代

LI Ta-tsien & YU Wen-ci:
**“Boundary Value Problems for
Quasilinear Hyperbolic Systems”** (1985)

局部解的完整理论:

边值问题, 自由边界问题.

激波, 接触间断, 中心波.

- 局部 $\longrightarrow$ 整体:
- Cauchy问题, 混合问题, 边值问题, 自由边界问题,
- 激波, 接触间断.....
- 弱线性退化, 标准化坐标.

- 局部 $\longrightarrow$ 整体:
- Cauchy问题, 混合问题, 边值问题, 自由边界问题,
- 激波, 接触间断.....
- 弱线性退化, 标准化坐标.

正问题 $\longrightarrow$ 反问题

已知物面形状, 求激波

已知激波, 求物面形状

- 定型 $\longrightarrow$ 变型 洪家兴
- 低维 $\longrightarrow$ 高维 陈恕行
- 秦铁虎
- 周 忆
-

- 定型 $\longrightarrow$ 变型 洪家兴
- 低维 $\longrightarrow$ 高维 陈恕行
- 秦铁虎
- 周 忆
-

- 定型 $\longrightarrow$ 变型 洪家兴
- 低维 $\longrightarrow$ 高维 陈恕行
- 秦铁虎
- 周 忆
-

- 定型 $\longrightarrow$ 变型 洪家兴
- 低维 $\longrightarrow$ 高维 陈恕行
- 秦铁虎
- 周 忆
-

二. 要重视常微分方程的驱动

- 借鉴.
本质上的差异.
- 零解的渐近稳定性,
精确能控性
精确能观性
.....

二. 要重视常微分方程的驱动

- 借鉴.
本质上的差异.
- 零解的渐近稳定性,
精确能控性
精确能观性
.....

零解的渐近稳定性



$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X = (x_1, \dots, x_N)$$

$f(0) = 0$: 零解 $X = 0$ 是一个平衡态

小扰动 $t = 0$: $X = \varepsilon$.

- 若解 $X = X(t; \varepsilon)$ 在 $t \geq 0$ 上整体存在, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, (指数) 衰减为 0, 则称为具有零解的渐近稳定性.

零解的渐近稳定性



$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X = (x_1, \dots, x_N)$$

$f(0) = 0$: 零解 $X = 0$ 是一个平衡态

小扰动 $t = 0$: $X = \varepsilon$.

- 若解 $X = X(t; \varepsilon)$ 在 $t \geq 0$ 上整体存在, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, (指数) 衰减为 0, 则称为具有零解的渐近稳定性.

定理: 若线性化方程组

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (A = \nabla f(0))$$

具有“耗散性”(A的一切特征值的实部均为负 $\iff$ 任何非平凡解在 $t \rightarrow +\infty$ 时均指数衰减为零), 则原方程组具有零解的渐近稳定性

● 完全非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(u, Du, D_x Du),$$

$$\text{其中 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

$$F(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^p), \quad \forall |\hat{\lambda}| \text{ 小}, \quad p \geq 2 \text{ 整数}.$$

$$u \equiv 0 \text{ --- 平衡态.}$$



$$t = 0: \quad u = \varepsilon \varphi(x), \quad u_t = \varepsilon \psi(x),$$

其中 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ 为小参数.

● 完全非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(u, Du, D_x Du),$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

$$F(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^p), \quad \forall |\hat{\lambda}| \text{ 小}, \quad p \geq 2 \text{ 整数}.$$

$$u \equiv 0 \text{ --- 平衡态}.$$



$$t = 0: \quad u = \varepsilon \varphi(x), \quad u_t = \varepsilon \psi(x),$$

其中 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$ 为小参数.

线性化方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

不含耗散项, 但解仍可有一定衰减性:

$$|u(t, x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

空间维数 $n \geq 2$ 时, 一切解均衰减. 但不是指数衰减, 而且是多项式衰减; n 愈大, 衰减愈快.

“荣誉犹如水中的圆圈,

(它)永不停息地扩大,

直至伸展到化为乌有.”

— 莎士比亚《亨利四世》

- 对小解而言, p 愈大, 非线性项 F 的影响愈小.
- 当 n 及 p 足够大时, 可望有零解的渐近稳定性.

要找 n 及 p 这二整数之间的一个 **关系**:

满足这个关系, Cauchy 问题的经典解在 $t \geq 0$ 上整体存在, 即解的生命跨度 $T(\varepsilon) = +\infty$, 且解具有与线性方程的解同样的衰减性, 即有零解的渐近稳定性;

反之, 就不具零解的渐近稳定性, 经典解将在有限时间内破裂, 解的生命跨度 $T(\varepsilon)$ 为有限数, 但当 n 及 p 愈大时, $T(\varepsilon)$ 也愈大. 要对 $T(\varepsilon)$ 建立最佳的估计.

- **研究目标**: 对一切整数 $n \geq 1$ 及 $p \geq 2$ 建立经典解生命跨度 $T(\varepsilon)$ 的下界的精确估计.

- 对小解而言, p 愈大, 非线性项 F 的影响愈小.
- 当 n 及 p 足够大时, 可望有零解的渐近稳定性.

要找 n 及 p 这二整数之间的一个 **关系**:

满足这个关系, Cauchy 问题的经典解在 $t \geq 0$ 上整体存在, 即解的生命跨度 $T(\varepsilon) = +\infty$, 且解具有与线性方程的解同样的衰减性, 即有零解的渐近稳定性;

反之, 就不具零解的渐近稳定性, 经典解将在有限时间内破裂, 解的生命跨度 $T(\varepsilon)$ 为有限数, 但当 n 及 p 愈大时, $T(\varepsilon)$ 也愈大. 要对 $T(\varepsilon)$ 建立最佳的估计.

- **研究目标**: 对一切整数 $n \geq 1$ 及 $p \geq 2$ 建立经典解生命跨度 $T(\varepsilon)$ 的下界的精确估计.

- 对小解而言, p 愈大, 非线性项 F 的影响愈小.
- 当 n 及 p 足够大时, 可望有零解的渐近稳定性.

要找 n 及 p 这二整数之间的一个 **关系**:

满足这个关系, Cauchy 问题的经典解在 $t \geq 0$ 上整体存在, 即解的生命跨度 $T(\varepsilon) = +\infty$, 且解具有与线性方程的解同样的衰减性, 即有零解的渐近稳定性;

反之, 就不具零解的渐近稳定性, 经典解将在有限时间内破裂, 解的生命跨度 $T(\varepsilon)$ 为有限数, 但当 n 及 p 愈大时, $T(\varepsilon)$ 也愈大. 要对 $T(\varepsilon)$ 建立最佳的估计.

- **研究目标**: 对一切整数 $n \geq 1$ 及 $p \geq 2$ 建立经典解生命跨度 $T(\varepsilon)$ 的下界的精确估计.

- 从上世纪八十年代前后开始, F. John, S. Kainerman, D. Christodonou, L. Hörmander 对一些特殊的情况用各种不同的方法分别得到有关的结果.
- 整体迭代法:
只须利用对线性波动方程的深入估计(各种范数下的衰减估计及能量估计)及压缩 映像原理,就可将问题解决到彻底的程度.

- 从上世纪八十年代前后开始, F. John, S. Kainerman, D. Christodonou, L. Hörmander 对一些特殊的情况用各种不同的方法分别得到有关的结果.
- **整体迭代法:**
只须利用对线性波动方程的深入估计(各种范数下的衰减估计及能量估计)及压缩 映像原理,就可将问题解决到彻底的程度.

整体迭代法原则上可使用于其他类型的非线性发展方程, 但必须针对各自的个性, 对相应的线性方程进行具体细致的估计.

● 非线性热传导方程

$$u_t - \Delta u = F(u, D_x u, D_x^2 u)$$

其线性化方程

$$u_t - \Delta u = 0$$

的解具有较高的衰减性估计:

$$|u(t, x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}.$$

● 零解的渐近稳定性有较好的结果

整体迭代法原则上可使用于其他类型的非线性发展方程, 但必须针对各自的个性, 对相应的线性方程进行具体细致的估计.

● 非线性热传导方程

$$u_t - \Delta u = F(u, D_x u, D_x^2 u)$$

其线性化方程

$$u_t - \Delta u = 0$$

的解具有较高的衰减性估计:

$$|u(t, x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}.$$

● 零解的渐近稳定性有较好的结果.

三. 要重视科学计算的驱动

- 从源头上来减低计算复杂性
- 石油开发电法测井

在电极表面 Γ 上的非局部边界条件(等值面边界条件):

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = C(\text{待定常数}), \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I(\text{已知常数}). \end{cases}$$

三. 要重视科学计算的驱动

- 从源头上来减低计算复杂性
- 石油开发电法测井

在电极表面 Γ 上的**非局部**边界条件(**等值面边界条件**):

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = C(\text{待定常数}), \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I(\text{已知常数}). \end{cases}$$

高等学校教学用书

电 法 测 井

上 册

张 庆 祺 主 编



石油工业出版社

求阻, 将式 (3-77) 代入上式, 即得

$$U_{M'}^{(1)} + cU_{M'}^{(2)} = U_{M'}^{(1)} + cU_{M'}^{(2)}$$

由此得出

$$c = \frac{U_{M'}^{(1)} (-U_{M'}^{(2)})}{U_{M'}^{(2)} (-U_{M'}^{(1)})}$$

把求出的常数 c 代入 $U_{M'}$ 中, 于是得到

$$U_{M'} = U_{M'}^{(1)} + cU_{M'}^{(2)} = \frac{U_{M'}^{(1)} (U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)}) - U_{M'}^{(2)} (U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)})}{U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)}}$$

把 $U_{M'}$ 代入式 (3-45), 即得

$$R_e = kU_{M'} = k \frac{U_{M'}^{(1)} (U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)}) - U_{M'}^{(2)} (U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)})}{U_{M'}^{(1)} - U_{M'}^{(2)}} \quad (3-78)$$

浅侧向

将上述双侧向电极系的屏蔽电极 A_1' 变成回路电极 B_1 , 就成了浅侧向电极系, 这里把 $A_{M'}$ 、 A_1 和 B_1 都当成恒流电源处理。

同样, 考虑两个分电场

$$U^{(1)} \text{ 是 } I_{A_1} = \frac{1}{2}, I_{A_2} = 0, I_{B_1} = -\frac{1}{2} \text{ 时的电位}$$

$$U^{(2)} \text{ 是 } I_{A_1} = 0, I_{A_2} = 1, I_{B_1} = -1 \text{ 时的电位}$$

根据电位叠加原理, 当 $I_{A_1} = \frac{1}{2}, I_{A_2} = c, I_{B_1} = -\left(\frac{1}{2} + c\right)$ 时, 电位 U 是

$$U = U^{(1)} + cU^{(2)}$$

确定常数 c 的条件还是

$$U_{M'} = U_{M'}$$

以下的步骤和双侧向完全相同, 其最后结果在形式上也和式 (3-78) 相同, 只是 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 所表示的意义不同。

由式 (3-78) 可以看出, 计算 R_e 就归结为计算两个分电场的电位即 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 。两个分电场的电位计算方法完全相同, 都是用上面所概述的有限元素法。

本章参考文献

- [1] 华东石油学院测井教研室, 《测井仪器》(下册), 1980。
- [2] 石油勘探开发研究院, 《测井解释图谱》, 1978。
- [3] 李大潜等编著, 《有限元素法在电法测井中的应用》, 第1版, 石油工业出版社, 1980。
- [4] 梁强廷, 《三电极系侧向测井的径向几何因子》, 地球物理学院, 18, No.4, 284—296, 1975。

高等学校教学用书

电 法 测 井

下 册

张 庚 骥 编著



石油工业出版社

$$-\frac{2D_z(A_z, A_z, b)}{D(A_z, A_z, b)} \cos(\angle L) d\lambda$$

和

$$\frac{L}{\pi} R_z \int_0^{\pi} \frac{1}{[D(A_z, A_z, b)]^2} [K_z(A_z b) K_z(A_z b) - K_z(A_z b) a]^2 \cos(\angle L) d\lambda$$

不难证明, 这两个表达式分别是

$$\frac{\partial \Sigma_z}{\partial a_z} \quad \text{和} \quad \frac{\partial \Sigma_z}{\partial a_z}$$

这样就完成了公式 (3-112) 的证明。

如果式 (3-106) 中的 σ_{0z} 是恒定电导率 σ_{0z} , 则在任何深度上 $\Delta \sigma_z$ 都等于零, 公式 (3-112) 成立的条件是在积分中比值 $\Delta \sigma_z / \sigma_{0z}$ 保持不变, 现在这个条件得到满足, 所以公式 (3-110) 和 (3-111) 分别简化成

$$\sigma_z^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{0z}(x') \Sigma(x') dx' \quad (3-114)$$

和

$$g_{0z}(x') = \frac{2L}{\pi^2} \frac{R_z \int_0^{\pi} \phi_z(x', x') A_z d' \cos\left[\lambda\left(x' + \frac{L}{2}\right)\right] \cos\left[\lambda\left(x' - \frac{L}{2}\right)\right] d\lambda dx'}{\frac{\partial \Sigma_z}{\partial a_z}}$$

公式 (3-114) 中的 x' 是以线圈对中点为参照点的座标, 向上为正, 当线圈系在井内移动时, x' 和 x' 之间的函数关系是随时在变的, 所以应当选择以固定点为参照点的座标表示 x' , 如果线圈对中点相对固定点的深度是 z' (向下为正), 则相对线圈对中点的座标为 r' 的点, 相对于固定点的深度就是 $z - z'$, 式 (3-114) 因此应写成

$$\sigma_z^{(1)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{0z}(x') \Sigma(z - z') dx' \quad (3-115)$$

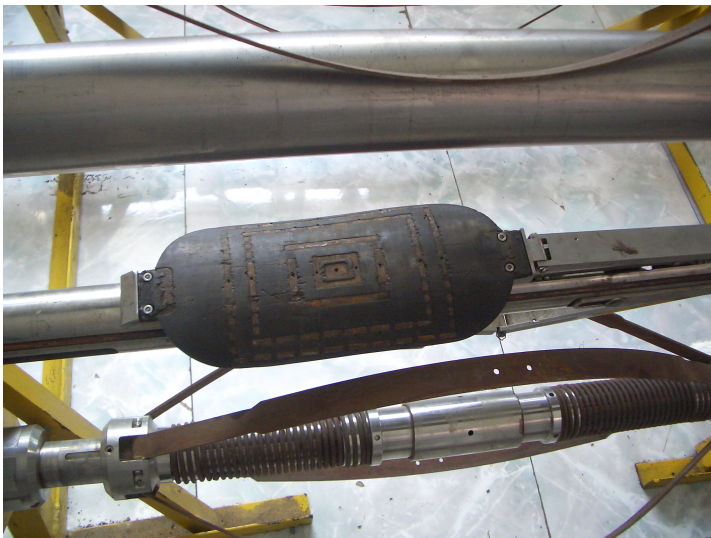
这就是卷积, 可以写成

$$\sigma_z^{(1)}(z) = g_{0z} * \Sigma(z)$$

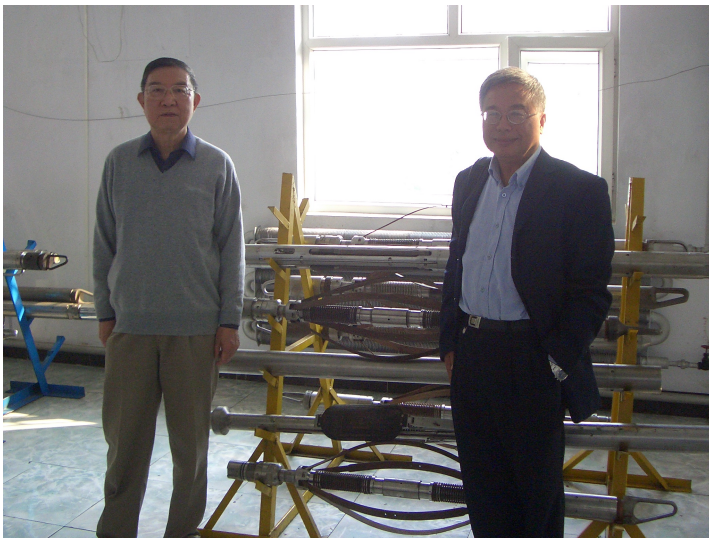
公式 (3-116) 比第二章第六节的卷积公式准确, 在那里没有考虑到井的影响, 而式 (3-116) 则考虑到了, 对它进行反卷积可以得到各个深度上的纵向均匀面纵向位置变化的介质的响应 $\Sigma(z)$, 根据这个 $\Sigma(z)$ 便可以求出各个深度上的真电导率。

参 考 文 献

- (1) 王竹溪、郭敦仁:《特殊函数概论》, 第一版, 科学出版社, 1979。
- (2) 华罗庚、王元:《数论在近似分析中的应用》, 第一版, 科学出版社, 1978。
- (3) 李大潜等:《有限元算法在电法测井中的应用》, 第一版, 石油出版社, 1980。



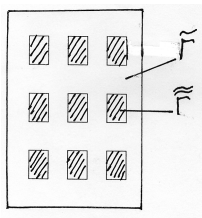




变曲率(分块)电极:

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\tilde{\Gamma}}, \quad \tilde{\tilde{\Gamma}} = \bigcup_i \tilde{\tilde{\Gamma}}_i$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\tilde{\Gamma}} = 0, \\ u|_{\tilde{\tilde{\Gamma}}} = C \text{ (待定常数)}, \\ \int_{\tilde{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I \text{ (已知常数)}. \end{cases}$$



满足适定性.

Γ 上的边界条件急剧改变类型 $\implies$ 计算复杂性.

- 能否在 Γ 上用一个简单而统一的边界条件来近似代替上述复杂的边界条件?

化简后的简单边界条件具有怎样的形式?

- 偏微分方程的均匀化 $\implies$ 边界条件的均匀化

后续的研究: O. A. Oleinik及其学派,
A. Friedman

满足适定性.

Γ 上的边界条件急剧改变类型 $\implies$ 计算复杂性.

- 能否在 Γ 上用一个简单而统一的边界条件来近似代替上述复杂的边界条件?

化简后的简单边界条件具有怎样的形式?

- 偏微分方程的均匀化 $\implies$ **边界条件的均匀化**

后续的研究: O. A. Oleinik及其学派,
A. Friedman

- 基本的思路: 既然出现了计算的复杂性, 干脆考虑最坏的极端情况, 即设电极愈分愈细、愈分愈多(但总面积不变或保持同一量级)而考虑其极限.
- 均匀化边界条件

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = C \text{ (待定常数)}, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I \text{ (已知常数)}. \end{cases}$$

分块电极 $\longrightarrow$ 整块电极.

- 基本的思路: 既然出现了计算的复杂性, 干脆考虑最坏的极端情况, 即设电极愈分愈细、愈分愈多(但总面积不变或保持同一量级)而考虑其极限.
- 均匀化边界条件

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = C \text{ (待定常数)}, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = I \text{ (已知常数)}. \end{cases}$$

分块电极 $\longrightarrow$ 整块电极.

谢谢!