

2022年天体力学数学理论研讨会

相对论天体系统的 几何积分算法

伍歆

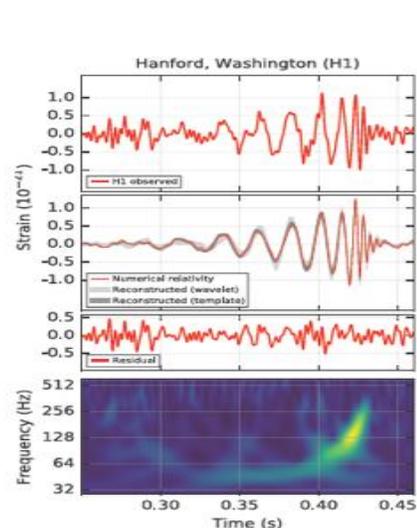
上海工程技术大学

2022年11月24日

研究领域：相对论天体力学

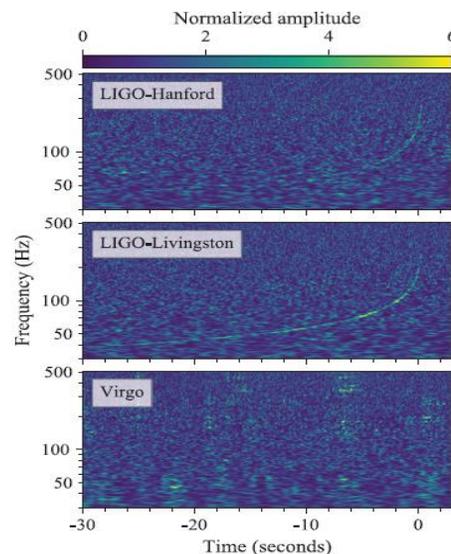
研究背景：引力波发现获2017年诺贝尔奖

研究方向



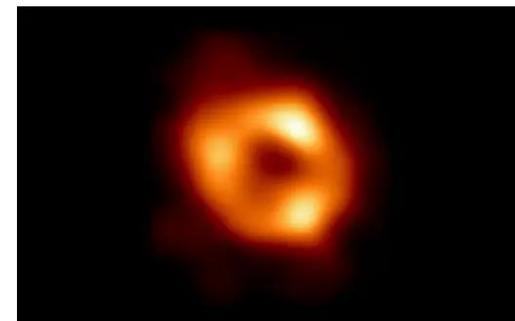
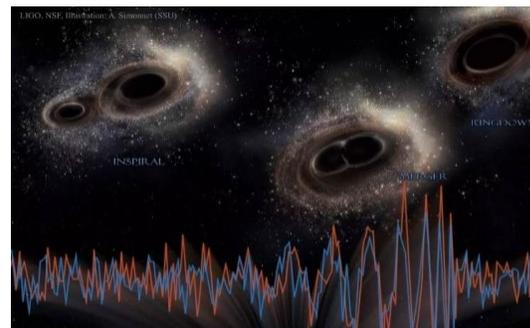
双黑洞并合

GW 150914
(Abbott et al. 2016)



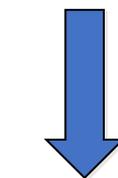
双中子星并合

GW 170817
(Abbott et al. 2017)

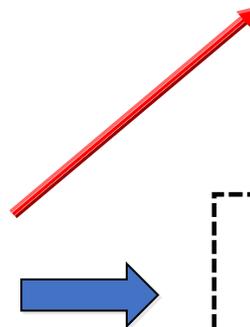


引力理论

轨道动力学性质



轨道计算



引力波形



黑洞阴影

一、后牛顿理论

1-1 正则自旋变量

1-2 后牛顿拉格朗日与哈密顿系统关系

1-3 自洽后牛顿拉格朗日方程

二、几何积分算法

2-1 流形改正方法

2-2 能量保持算法

2-3 扩大相空间方法

2-4 显隐混合辛算法

2-5 黑洞时空显辛算法

一、后牛顿理论： 1-1 正则共轭自旋变量

$$H(\vec{p}, \vec{q}, \vec{S}_1, \vec{S}_2) : \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \dot{\vec{S}}_1 = \frac{\partial H}{\partial \vec{S}_1} \times \vec{S}_1$$

$$\vec{S}_1 = |\vec{S}_1| \hat{S}_1(x, y, z) \qquad \vec{S}_2 = |\vec{S}_2| \hat{S}_2(x, y, z)$$

$$\vec{S} = |\vec{S}| \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \rho = \sqrt{|\vec{S}|^2 - \xi^2}$$

θ 广义坐标
 ξ 广义动量

$$H^*(\vec{p}, \xi_1, \xi_2; \vec{q}, \theta_1, \theta_2) \quad (2010 PRD)$$

刘维尔可积
定理应用

辛算法应用

1-2 后牛顿拉格朗日与哈密顿关系

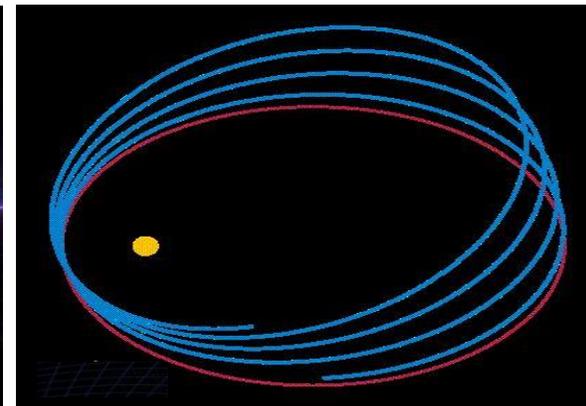
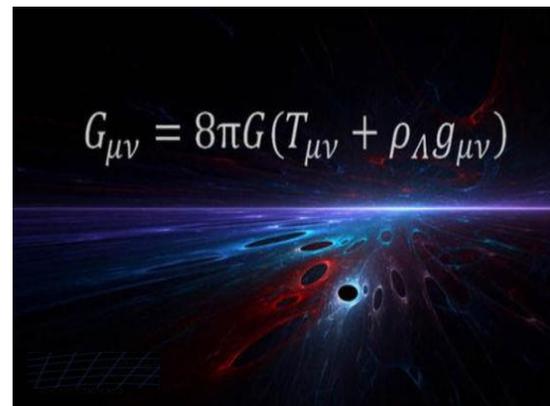
牛顿力学：L与H等价

Damour2001PRD

$$H = \underline{p} \cdot \underline{v} - L$$

$$p = \partial L / \partial v$$

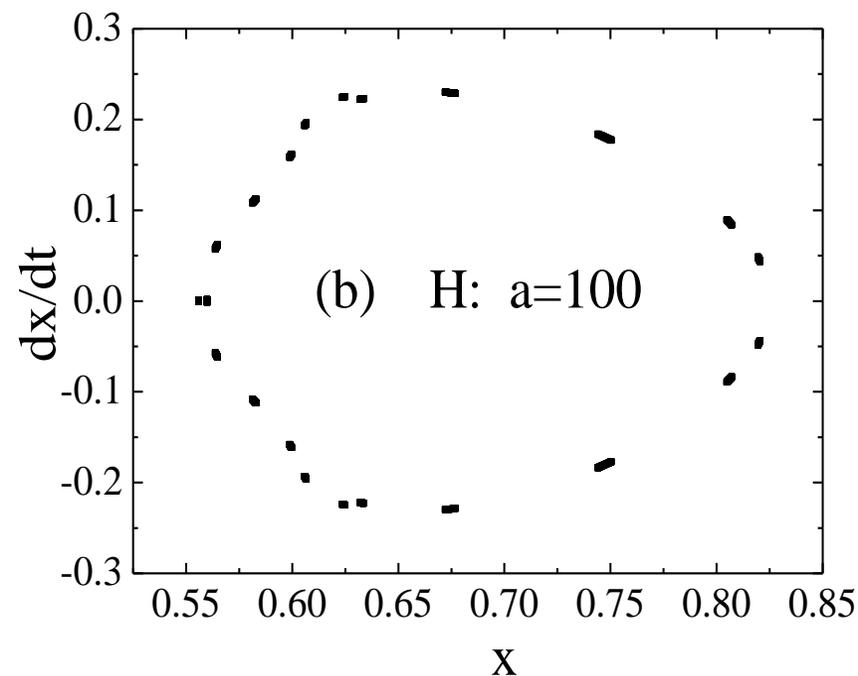
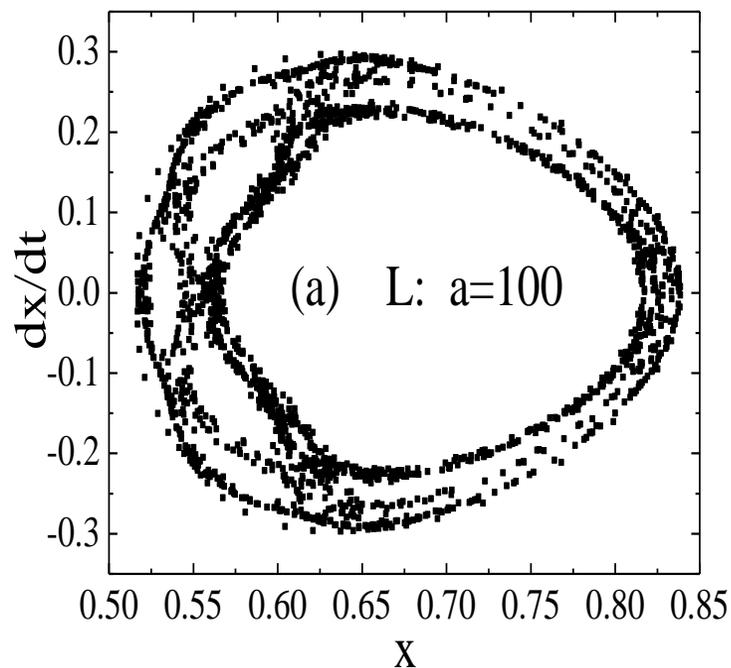
广义相对论后牛顿力学：GM/r或v/c幂级数



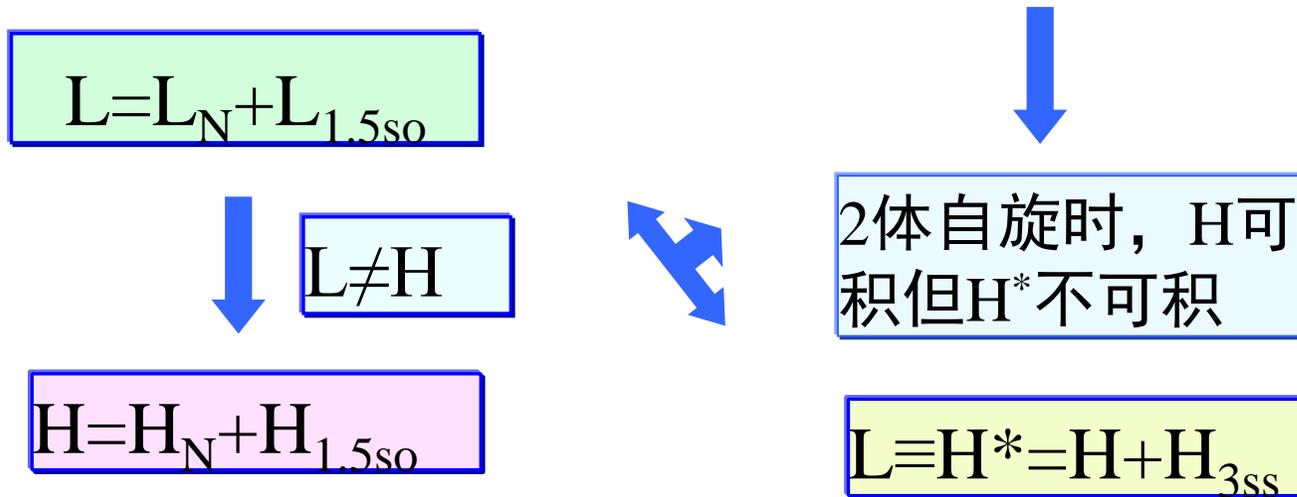
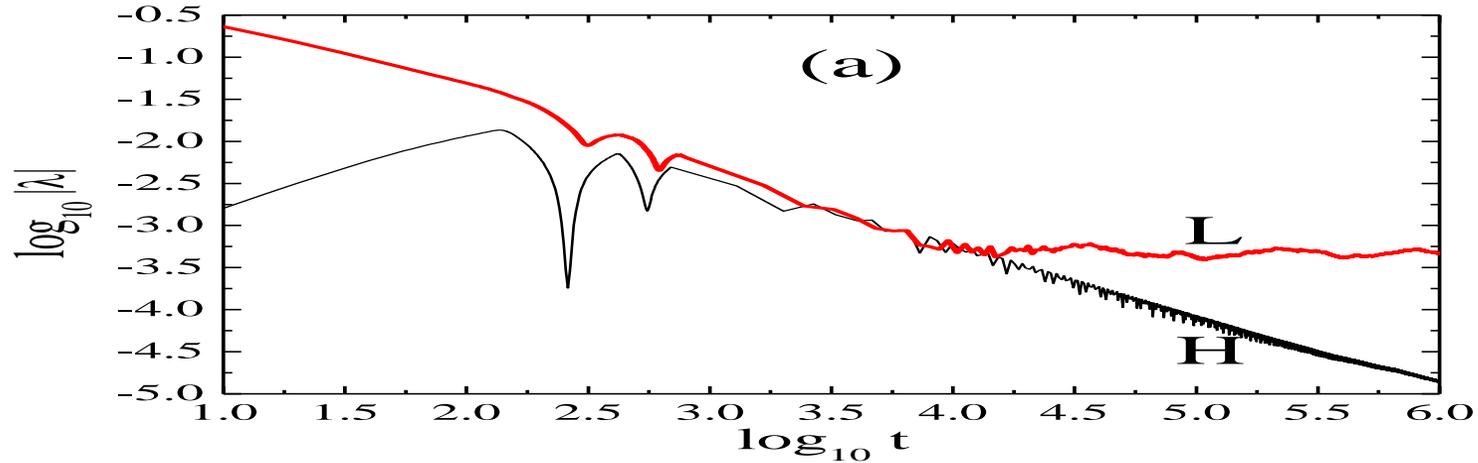
■ 例1: 仅考虑两主天体圆频率的1PN效应限制三体问题 $L=L_N+L_{1PN} \rightarrow H=H_N+H_{1PN}$

◆ 特点: L 运动方程与运动常数准确

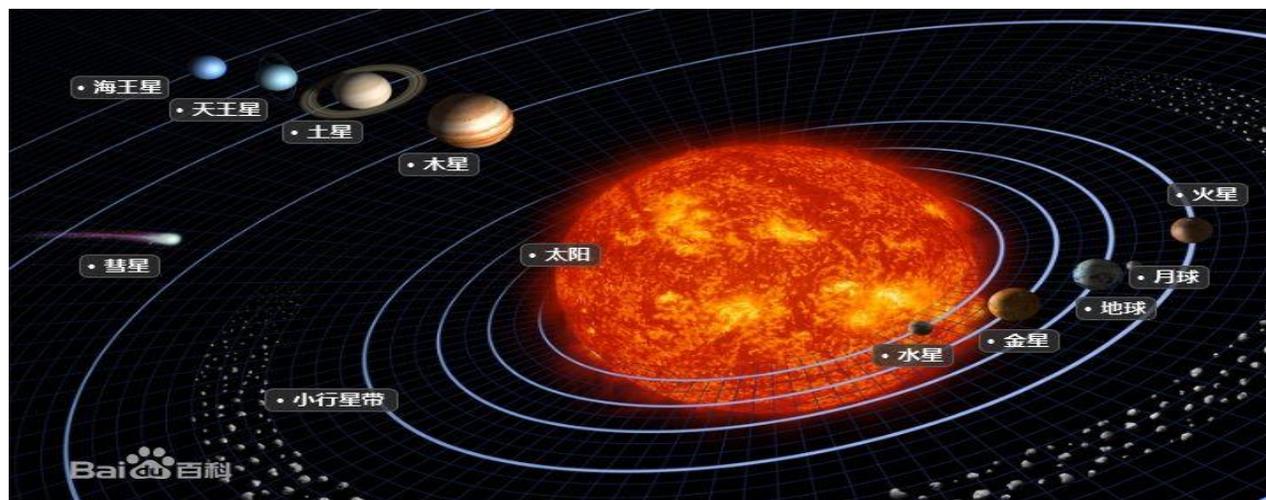
◆ 比较: $L \neq H$ 但 $L \equiv H^* = H + H_{2PN}$



例2：特殊自旋致密双星系统



■ 例3：太阳系弱引力场 L与H等价



Planet	1PN Effect	2PN difference
Mercury	2.58×10^{-8}	6.63×10^{-16}
Venus	1.38×10^{-8}	1.90×10^{-16}
Earth	9.97×10^{-9}	9.94×10^{-17}
Mars	6.54×10^{-9}	4.28×10^{-17}
Jupiter	1.92×10^{-9}	3.68×10^{-18}
Saturn	1.04×10^{-9}	1.09×10^{-18}
Uranus	5.19×10^{-10}	2.69×10^{-19}
Neptune	3.32×10^{-10}	1.10×10^{-19}

1-3 自洽后牛顿拉格朗日方程

问题：已有文献，近似运动方程，近似保能量

2019AP、2020EPJP：自洽运动方程，准确保持能量

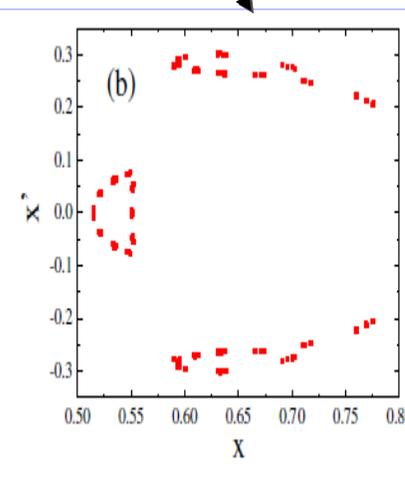
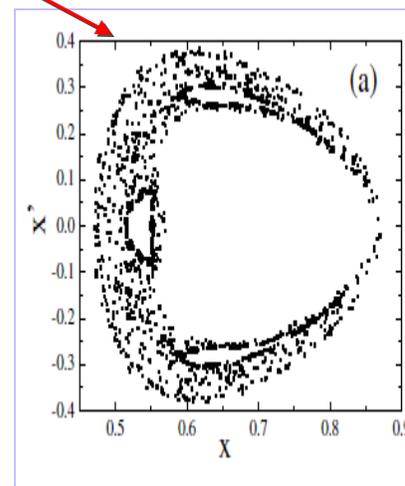
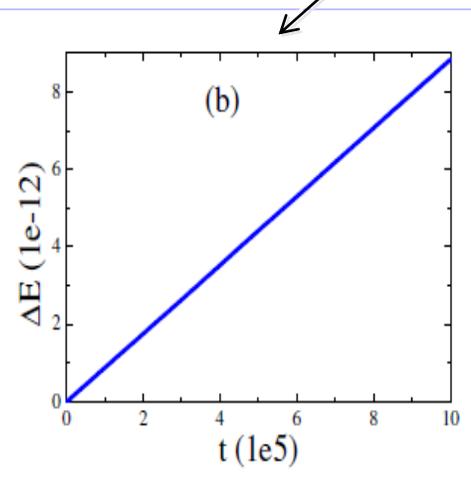
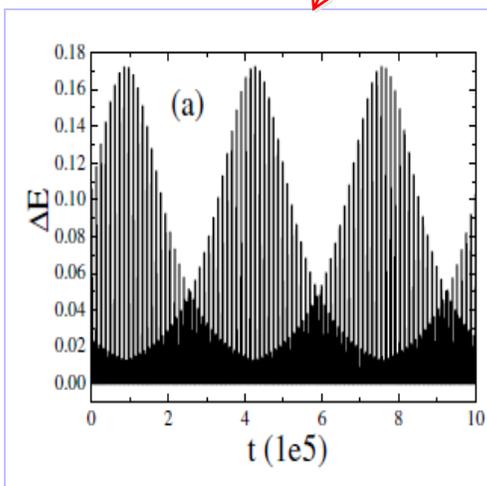
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{1PN} + \cdots + \mathbf{a}_{mPN}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

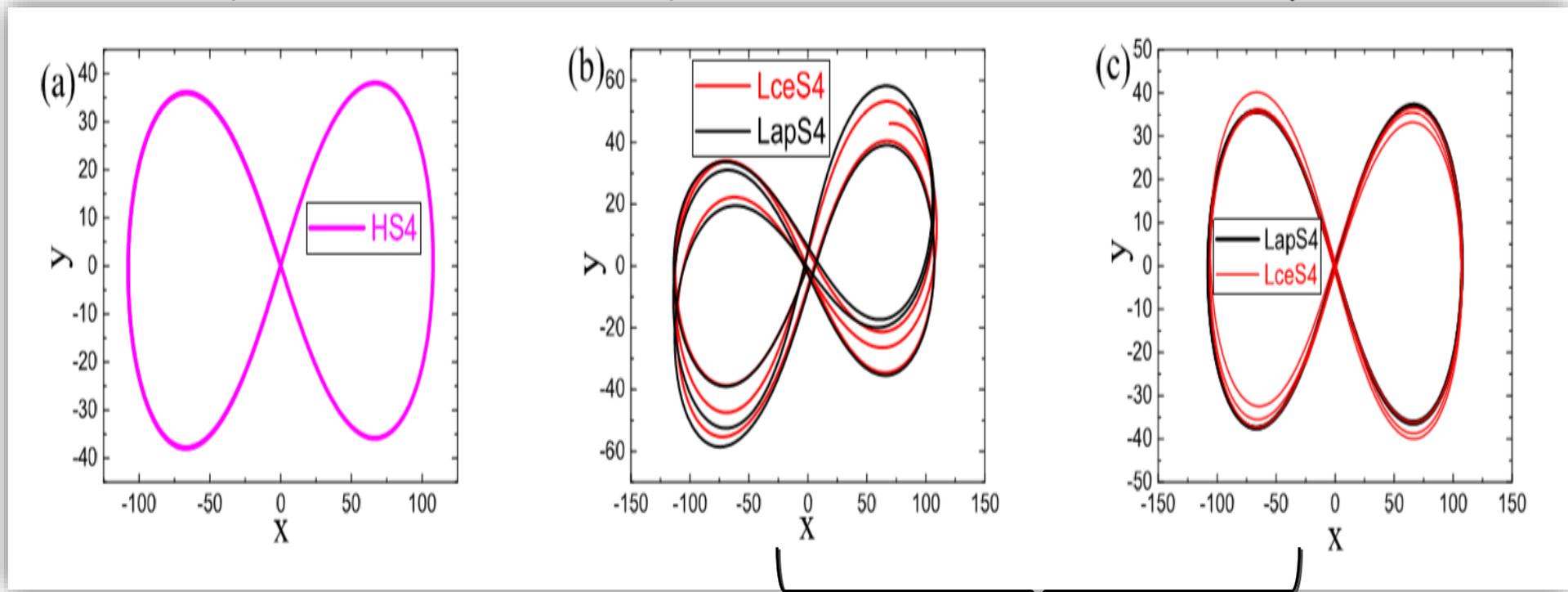
$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}$$



后牛顿三体问题周期轨道: 2021PRD

相同初始值

速度修正



后牛顿哈密顿

拉格朗日
LceS4: 自洽方程
LapS4: 近似方程

■ 在牛顿引力理论里，拉格朗日与哈密顿等价，但二者数值一般不相等： $L=T-V$, $H=T+V$

■ 与已有文献不同，认为强场同阶后牛顿拉格朗日近似截断方程、不截断自洽方程与哈密顿三者一般不等价，数值也不相等；但太阳系弱场三者等价，数值仍不等

■ 黑洞时空中的拉格朗日与哈密顿系统既等价又数值也相等

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad \mathcal{H} = U \cdot p - \mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

二、几何积分算法

几何积分算法可以保持哈密顿系统的结构、运动常数和对称性等物理和几何性质，有效抑制守恒量误差，非常适合长时间数值积分。发展几何积分算法尤为重要。

发展几何积分算法还需要结合实际的物理模型：

后牛顿自旋
致密双星

三体问题；
限制性三体
问题

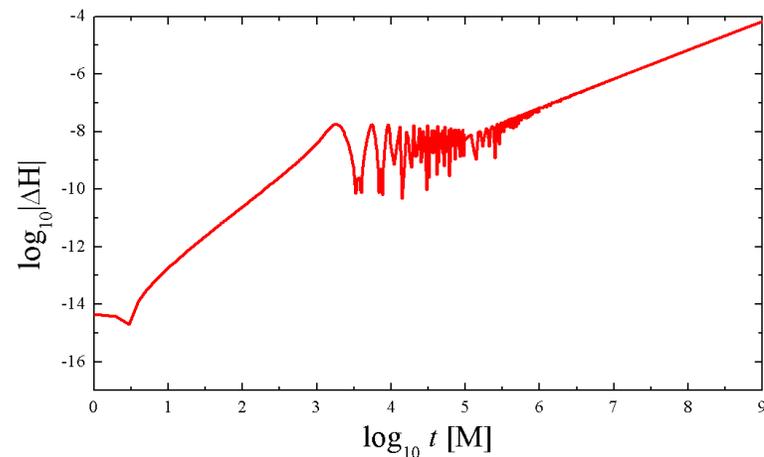
太阳系多体
问题

相对论弯曲
时空

- 龙库法的流形改正
- 能量严格保持方法
- 扩大相空间显式类辛算法
- 显隐混合辛算法
- 黑洞时空显辛算法

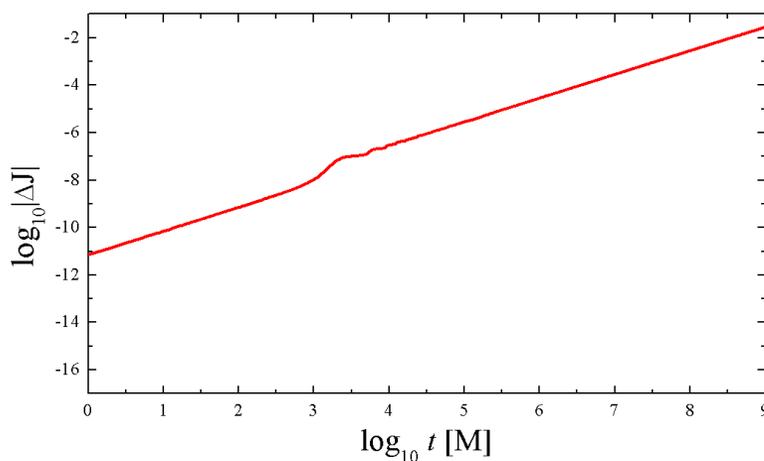
2-1 龙库法的流形改正

传统非几何数值积分算法，如龙格-库塔法，存在人工耗散，不能保持动力系统的运动常数。经过长时间积分后，这类算法的数值解将失真。

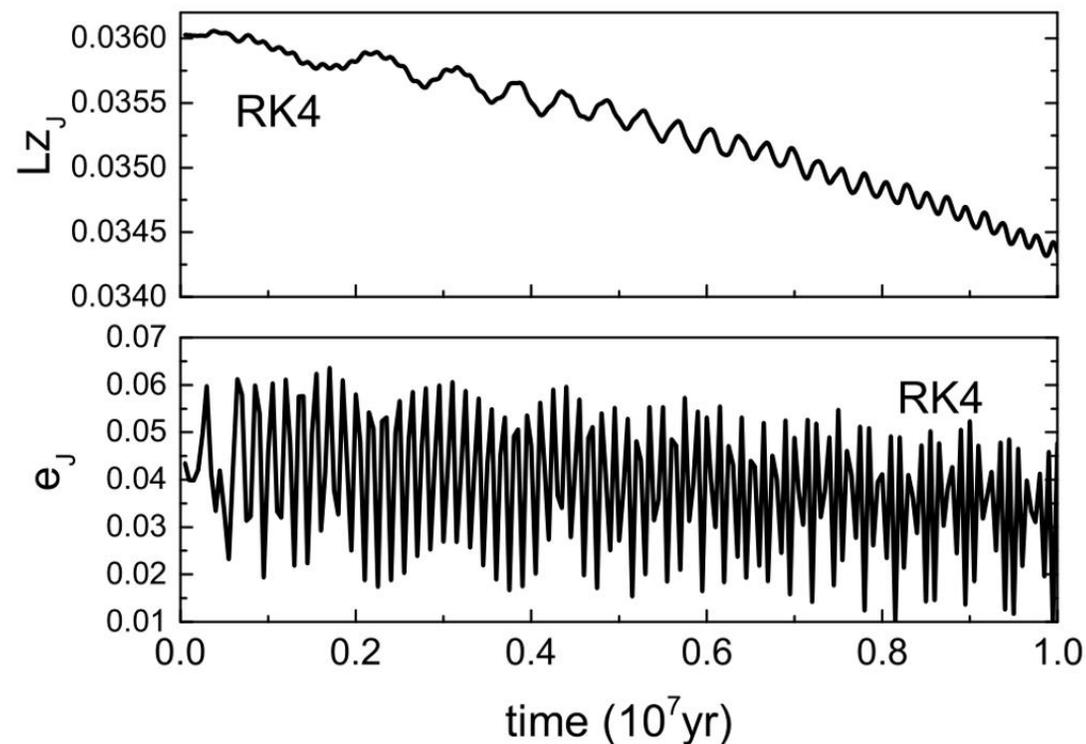


二阶龙库法积分 10^9 步后:

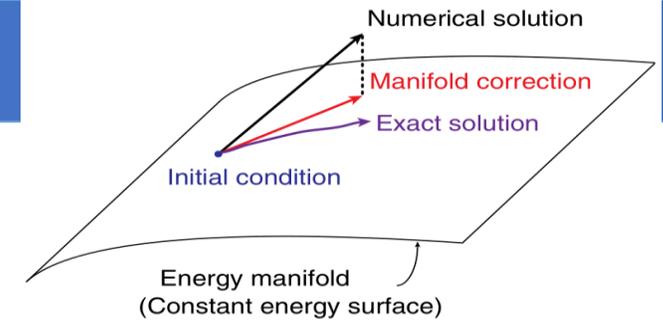
能量误差



角动量误差



利用RK4求解木星角动量Z轴分量和轨道偏心率数值结果显示木星的轨道偏心率和角动量不断减小，与实际不符！



◆ 保守系统的误差校正

4阶龙库法
 $H(p,q) \neq C$

保运动积分: Nacozy(1971);
Fukushima (2003AJ)

$H(kp,q) = C$: 速度因子法, NewA 2008

◆ 非保守系统的误差校正

RK4积分H的运动方程及导数, 得C(t)

$H(kp,q) = C(t)$: 速度因子法 ApJ2008, MN2016, AJ2018



The use of Kepler solver in numerical integrations of quasi-Keplerian orbits

Chen Deng,¹ Xin Wu^{1,2★} and Enwei Liang^{1,2}

¹*School of Physical Science and Technology, Guangxi University, Nanning 530004, China*

²*Guangxi Key Laboratory for Relativistic Astrophysics, Nanning 530004, China*

$$K = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = 0,$$

$$P^2 - 2KL^2 = \mu^2.$$

$$a = -\frac{\mu}{2K},$$

$$e = \frac{P}{\mu},$$

$$\cos I = \frac{L_z}{L}, \quad \sin I = \sqrt{1 - \cos^2 I},$$

$$\sin \Omega = \frac{L_x}{L \sin I}, \quad \cos \Omega = -\frac{L_y}{L \sin I},$$

$$\sin \omega = \frac{P_z}{e\mu \sin I},$$

$$\cos \omega = \frac{1}{e\mu} (P_x \cos \Omega + P_y \sin \Omega).$$

$$\mathbf{r}^* = \frac{a_0}{e_0 \mu} (\cos E^* - e_0) \mathbf{P}_0$$

$$+ a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E^* \mathbf{Q}_0,$$

$$\mathbf{v}^* = -\frac{a_0^2 n_0}{r^* e_0 \mu} \sin E^* \mathbf{P}_0$$

$$+ \frac{a_0^2 n_0}{r^*} \sqrt{1 - e_0^2} \cos E^* \mathbf{Q}_0,$$

$$\cos E^* = \frac{\cos f^* + e_0}{1 + e_0 \cos f^*},$$

$$\sin E^* = \frac{(1 - e_0 \cos E^*) \sin f^*}{\sqrt{1 - e_0^2}}.$$

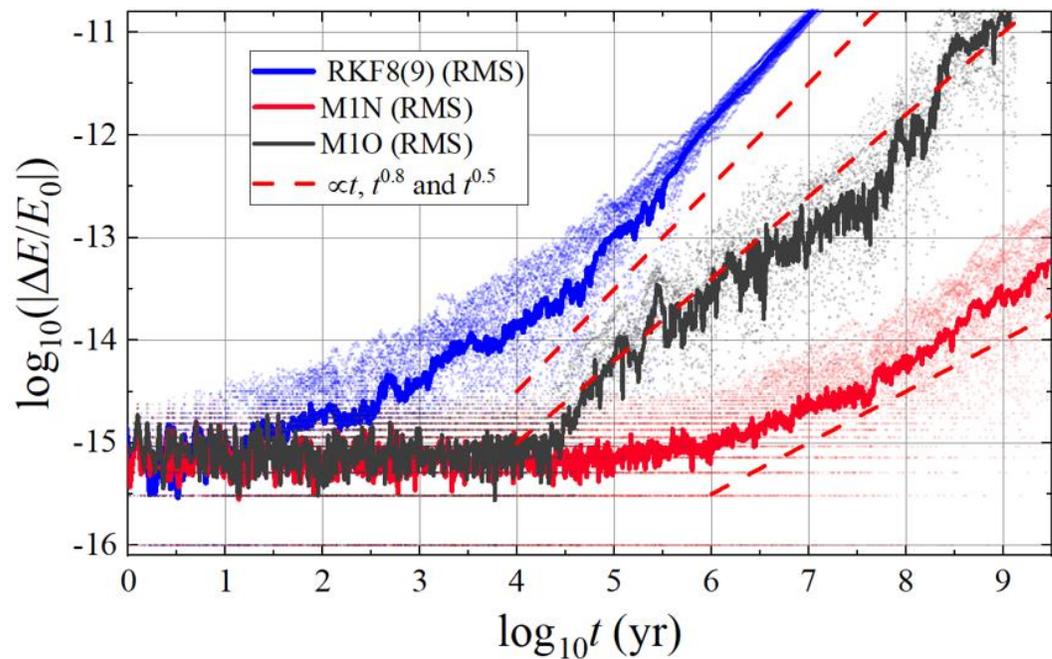
$$\frac{d\Delta K^*}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a},$$

$$\frac{d\Delta \mathbf{L}^*}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a},$$

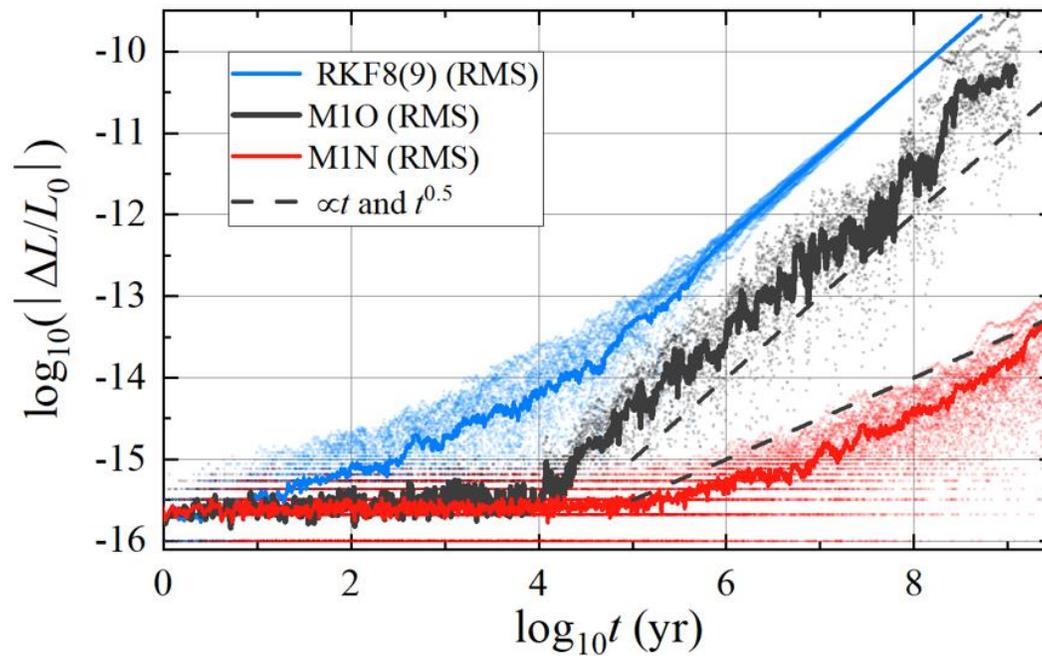
$$\frac{d\Delta \mathbf{P}^*}{dt} = 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}.$$

太阳系多体问题流形改正法

流形改正法(M1)在太阳系五体问题中的表现:



相对能量误差

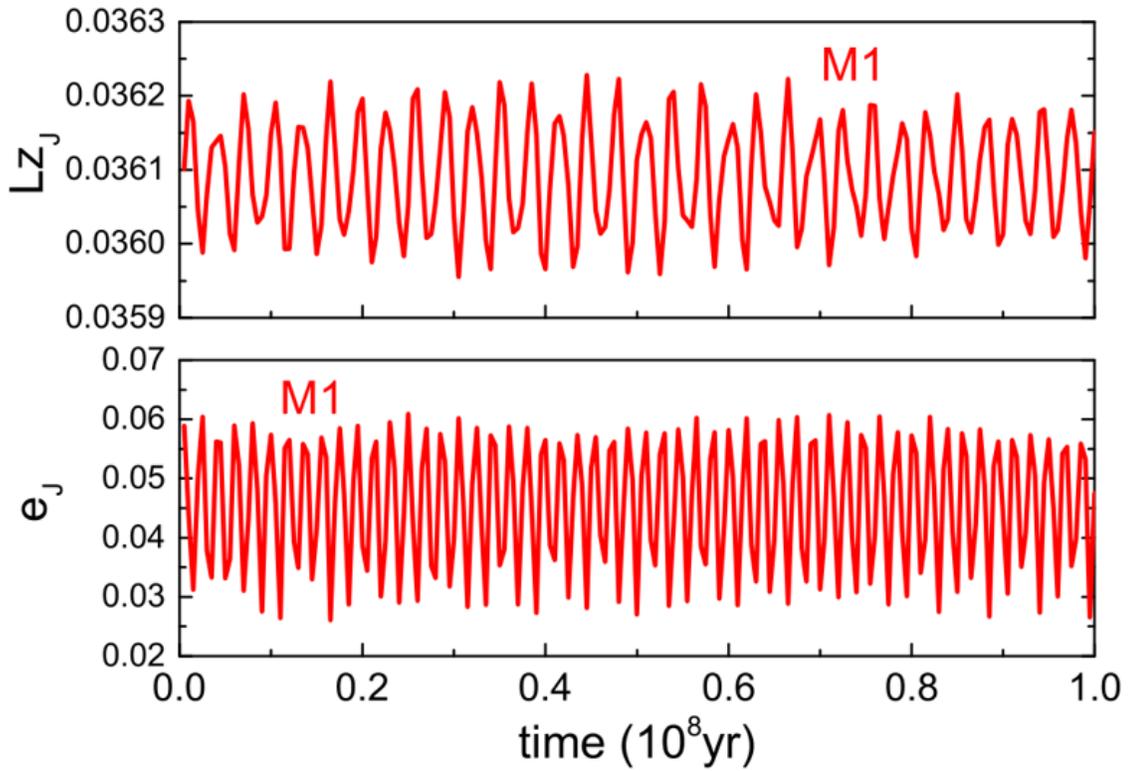
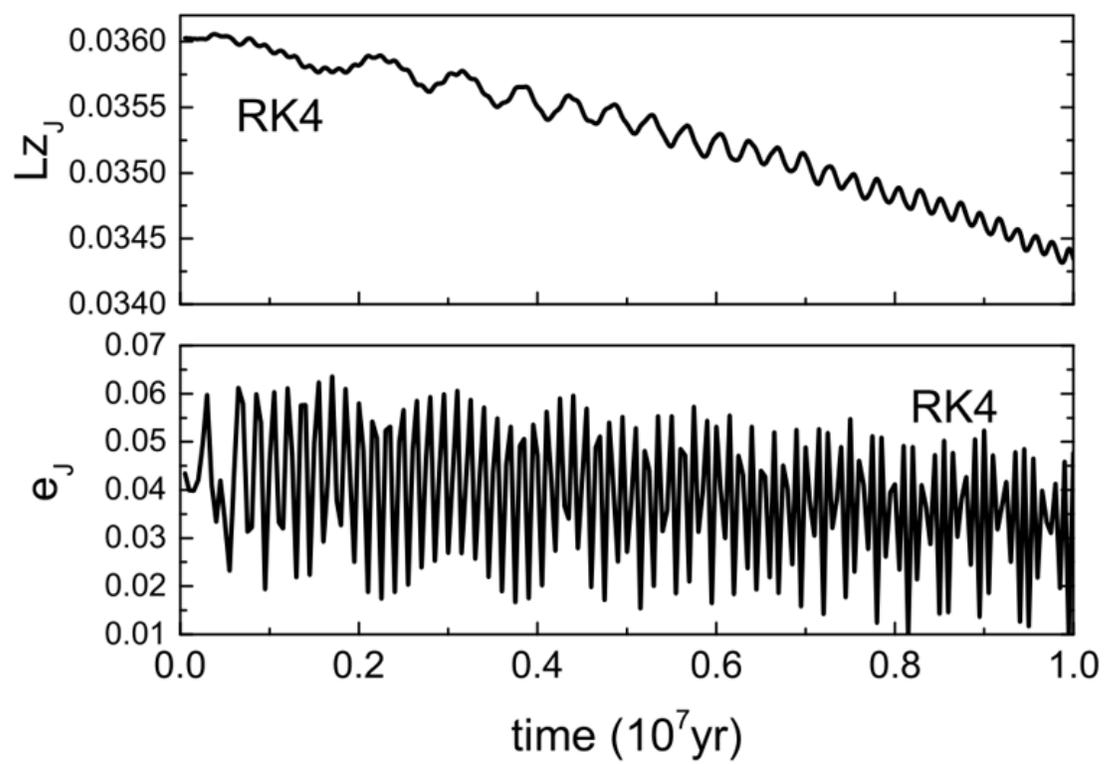


相对角动量误差

流形改正的误差累积满足布劳威尔定律。

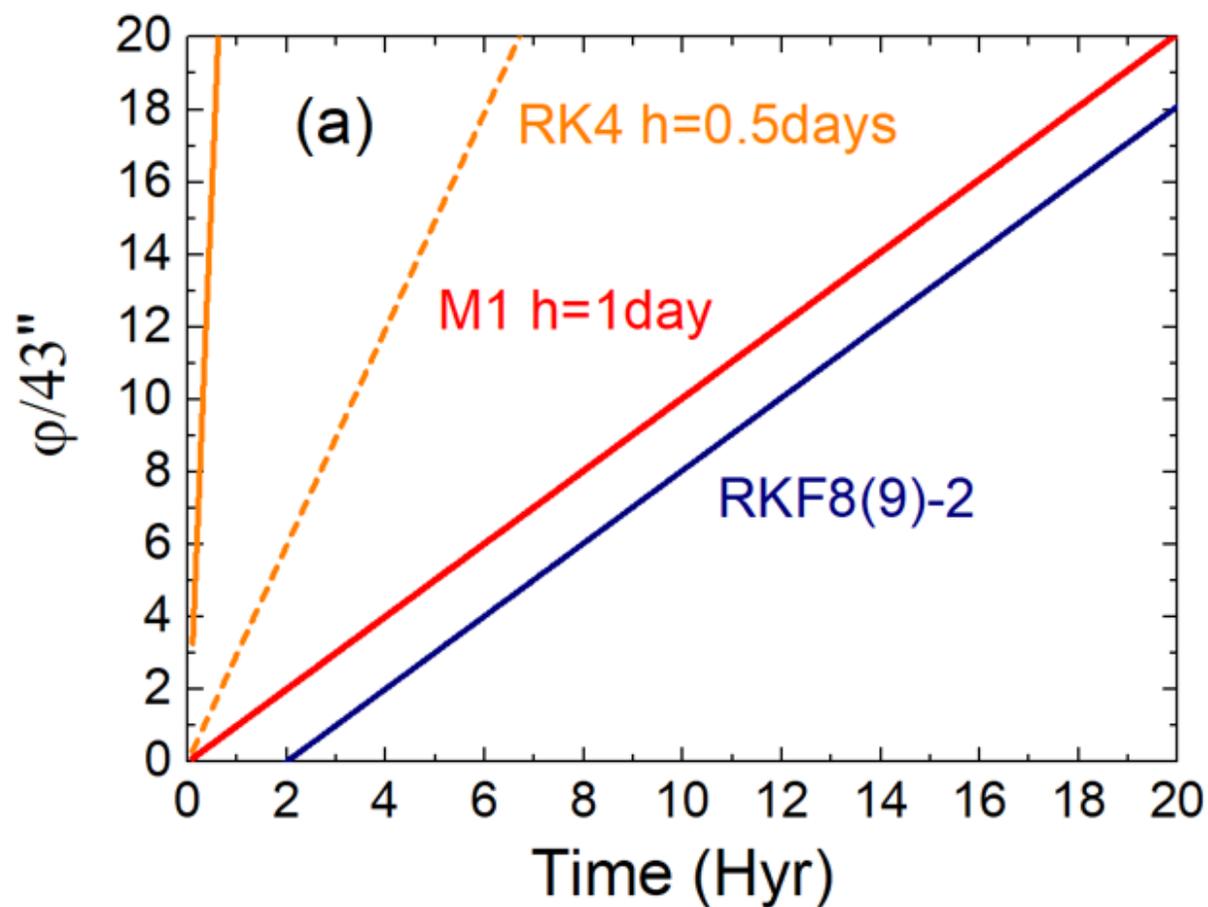
太阳系多体问题流形改正法在木星轨道计算中的应用

利用流形改正法M1修正数值解后，木星的角动量和轨道偏心率演化符合实际。



太阳系多体问题流形改正法在水星轨道计算中的应用

由于太阳系内存在摄动、相对论效应，导致水星近日点每百年产生43角秒的进动现象。流形改正法可以精准模拟这一现象：



2-2 能量保持算法

$H(p, q):$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = \frac{H(q_n, p_{n+1}) - H(q_n, p_n)}{p_{n+1} - p_n},$$

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = -\frac{H(q_{n+1}, p_{n+1}) - H(q_n, p_{n+1})}{q_{n+1} - q_n}.$$

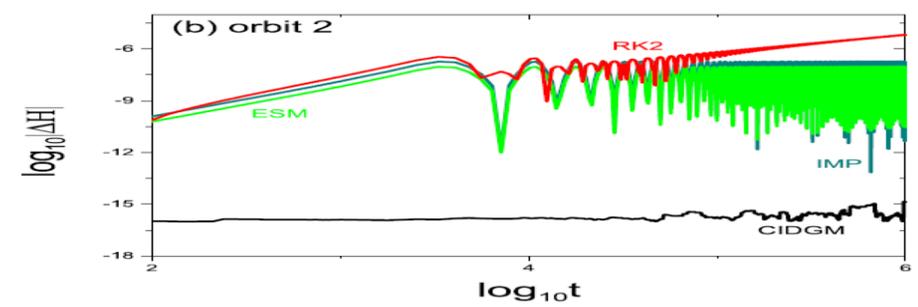
冯康
1985, 1阶

秦猛兆 1987, 2阶: 4维

Bacchini et al 2018ApJS, 2阶: 6维

2阶: 8维 ApJ 2019
10维: ApJS 2021

$$H(q_{n+1}, p_{n+1}) - H(q_n, p_n) = 0$$



根据前述构造思路，可得不同维数的保能量算法差分格式：

各算法数值解阶数由泰勒级数展开严格证明

$$\frac{q_1^{n+1} - q_1^n}{h} = \frac{1}{6(p_1^{n+1} - p_1^n)} \times \{ [H(q_1^n, q_2^n, q_3^n, p_1^{n+1}, p_2^n, p_3^n) - H(q_1^n, q_2^n, q_3^n, p_1^n, p_2^n, p_3^n)] + [H(q_1^{n+1}, q_2^n, q_3^n, p_1^{n+1}, p_2^n, p_3^n) - H(q_1^{n+1}, q_2^n, q_3^n, p_1^n, p_2^n, p_3^n)] + [H(q_1^n, q_2^n, q_3^{n+1}, p_1^{n+1}, p_2^n, p_3^{n+1}) - H(q_1^n, q_2^n, q_3^{n+1}, p_1^n, p_2^n, p_3^{n+1})] + [H(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, q_3^n, p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^n) - H(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, q_3^n, p_1^n, p_2^{n+1}, p_3^n)] + [H(q_1^n, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}, p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}) - H(q_1^n, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}, p_1^n, p_2^{n+1}, p_3^{n+1})] + [H(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}, p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}) - H(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}, p_1^n, p_2^{n+1}, p_3^{n+1})] \}$$

$$\frac{q_{11} - q_{10}}{h} = \frac{1}{8} \left[\frac{H(00001000) - H(00000000)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(00011000) - H(00010000)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(00011001) - H(00010001)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(00111001) - H(00110001)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(00111011) - H(00110011)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(01111011) - H(01110011)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(01111111) - H(01110111)}{p_{11} - p_{10}} + \frac{H(11111111) - H(11110111)}{p_{11} - p_{10}} \right]$$

$$\frac{q_{11} - q_{10}}{h} = \frac{1}{10} \frac{1}{p_{11} - p_{10}} \times [H(0000010000) - H(0000000000) + H(1000010000) - H(1000000000) + H(0000110001) - H(0000100001) + H(1100011000) - H(1100001000) + H(0001110011) - H(0001100011) + H(1110011100) - H(1110001100) + H(0011110111) - H(0011100111) + H(1111011110) - H(1111001110) + H(0111111111) - H(0111101111) + H(1111111111) - H(1111101111)]$$

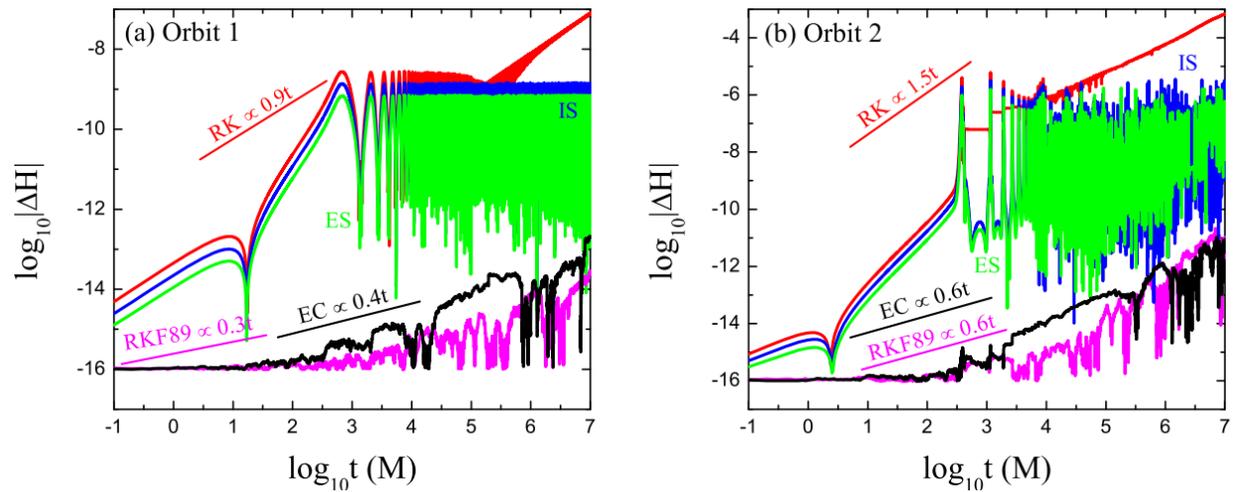
Hu, Wu, & Liang, Construction of a Second-order Six-dimensional Hamiltonian-conserving Scheme, ApJS, 2021.

Hu, Wu, Huang, & Liang, A Novel Energy-conserving Scheme for Eight-dimensional Hamiltonian Problems, ApJ, 2019.

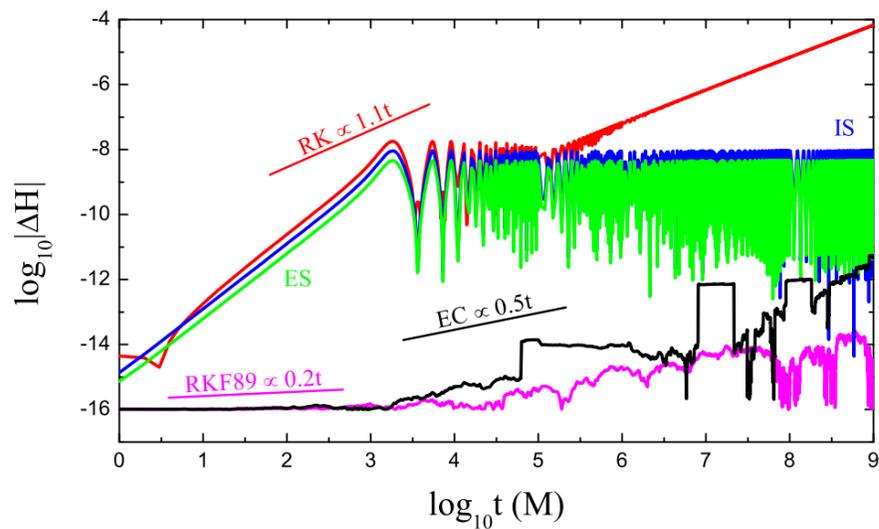
Hu, Wu, & Liang, An Energy-conserving Integrator for Conservative Hamiltonian Systems with Ten-dimensional Phase Space, ApJS, 2021.

十维保能量算法的能量误差

在后牛顿自旋致密双星系统中选取两条不同轨道，得到保能量算法(EC)、龙格-库塔法(RK)、扩大相空间类辛算法(ES)、隐式中点法(IS)及变步长八(九)阶龙库法(RKF89)的能量误差：



保能量算法不仅能量精度高，还具备长期稳定性：

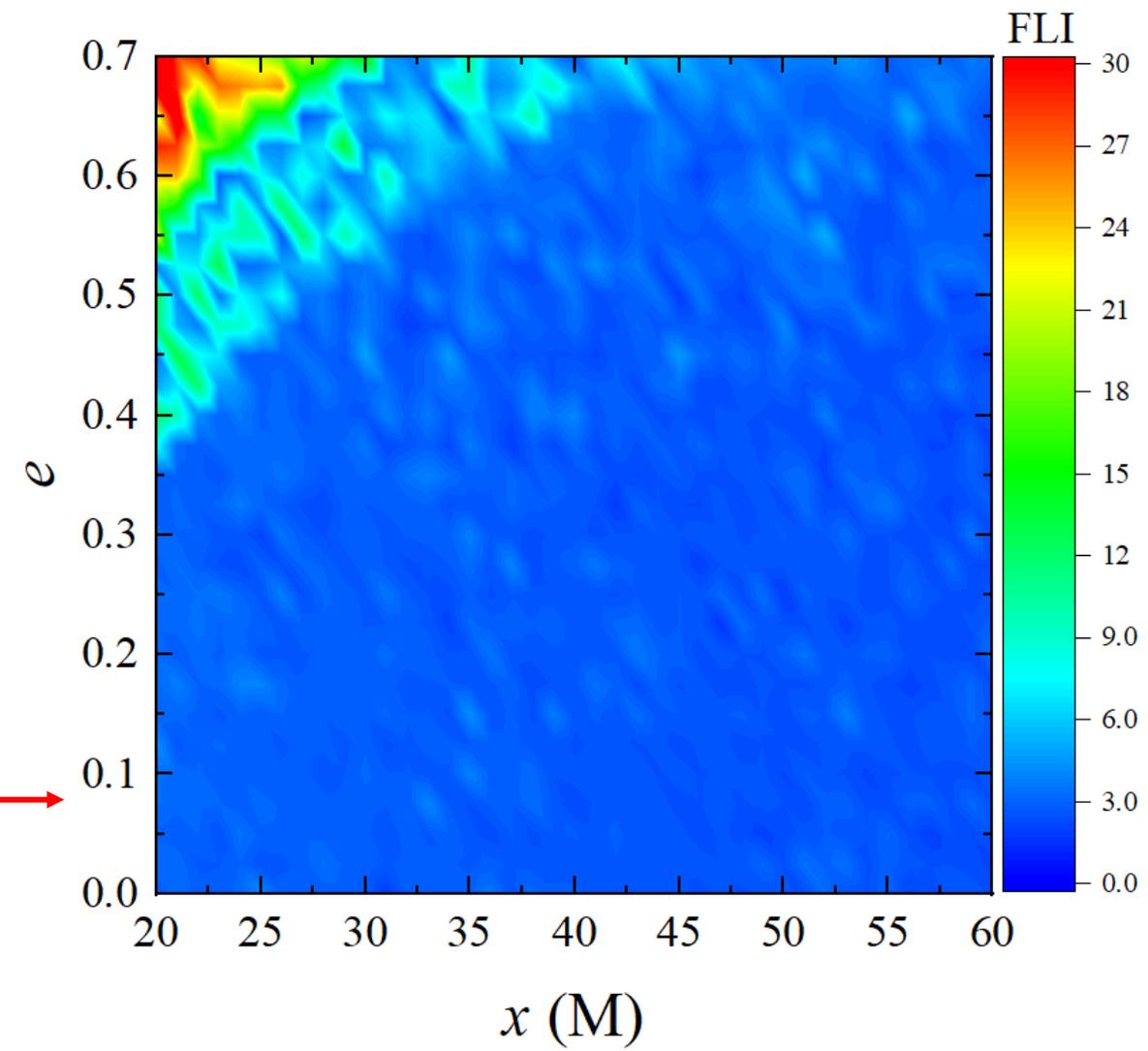
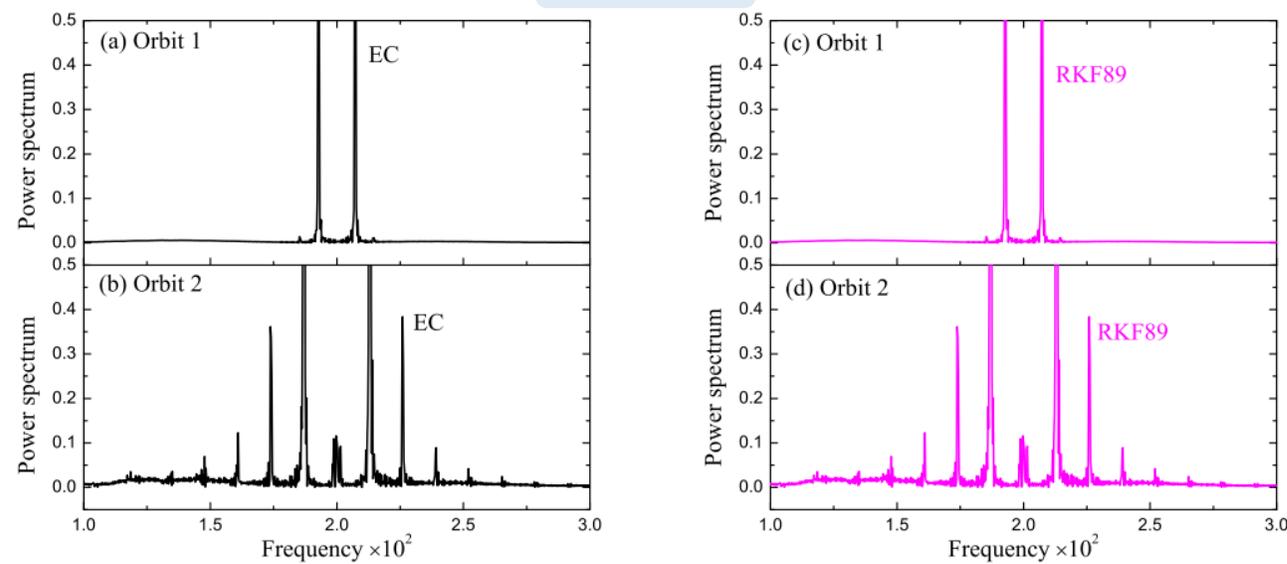


积分次数达十亿次

保能量算法在轨道动力学中的应用

保能量算法的数值解精度满足判断轨道动力学特征的要求，其对轨道特征的判断与RKF8(9)一致。

功率谱



后牛顿自旋致密双星混沌轨道的分布。当双星绕转距离较小、轨道偏心率较大时容易发生混沌现象，这为研究处于绕转阶段的双星辐射的引力波提供参考

2-3 扩大相空间显式类辛算法

$H(p, q):$
 $H_1(p, q^*)$
 $= H_2(p^*, q)$

扩大相空间
 $\Gamma = H_1 + H_2, A:$
 H_1 解 $B: H_2$ 解

二阶显式类辛算法(Pihajoki 2015CM):
 $S_2^* = M_2 A(h/2) B(h/2) M_1 B(h/2) A(h/2),$
 $M_1、M_2$ 动量置换

$S_2 = A(h/2) B(h) A(h/2)$

四阶显式类辛算法: $A_4 = M_2 S_2(ah)$
 $S_2(bh) S_2(ch) M_1 S_2(ch) S_2(bh)$
 $S_2(ah), M_2$ 坐标置换, 2016MNRAS

$M: (q+q^*)/2 = q=q^*$ $(p+p^*)/2 = p=p^*$

2017 ApJ: $S_4 = M S_2(ah) S_2(bh) S_2(ah), M$ 中点置换

动量坐标分别交替置换A4与中点置换S4的误差

Luo et al 2017 ApJ

$$M: (\mathbf{q}+\mathbf{q}^*)/2 = \mathbf{q}=\mathbf{q}^*$$

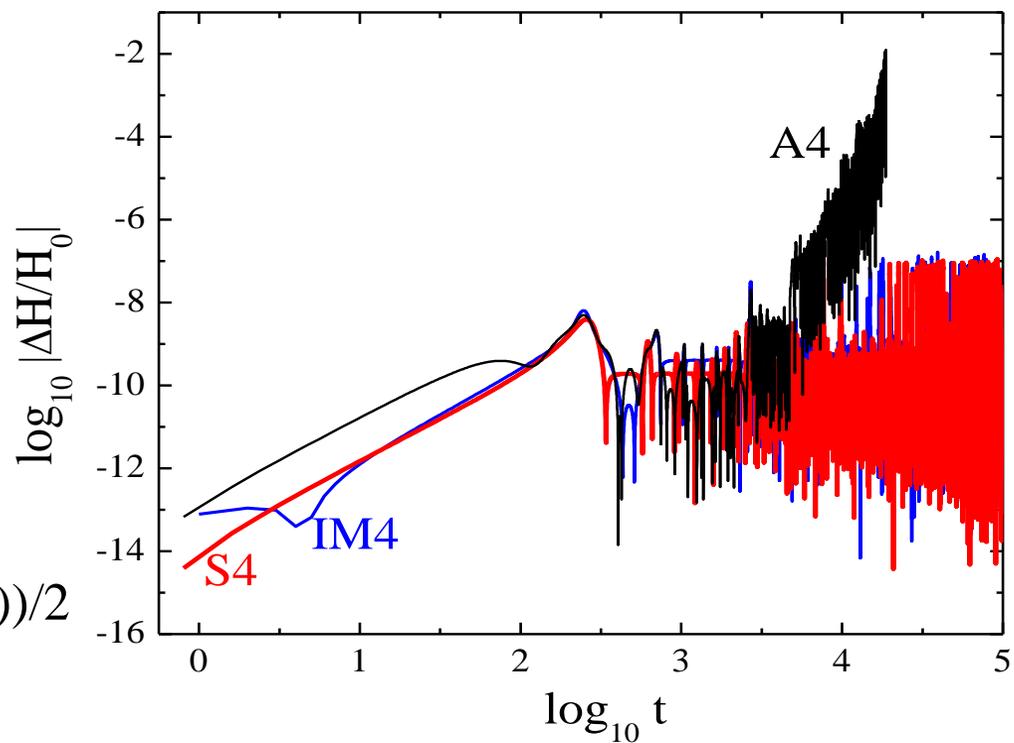
$$(\mathbf{p}+\mathbf{p}^*)/2 = \mathbf{p}=\mathbf{p}^*$$

Luo et al 2021 MN

$$M: (\mathbf{q}+\mathbf{q}^*)/2 = \mathbf{q}=\mathbf{q}^*$$

$$(\mathbf{p}+\mathbf{p}^*)_s = \mathbf{p}=\mathbf{p}^*$$

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (H1(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)+H2(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}))/2$$



Tao 2016 PRE

$$K(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H1(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)+H2(\mathbf{p}^*,\mathbf{q})+H3$$

$$H3(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w(|\mathbf{q}-\mathbf{q}^*|+|\mathbf{p}^*-\mathbf{p}|)$$

日本两作者
2023 Comp Math

Pan et al 2021 PRD: 后牛顿自洽拉格朗日方程

2-4 显隐混合辛算法

辛算法是几何算法中的佼佼者，具有保辛结构、时间可逆等优良属性。通常情况下，显式辛算法只可应用于坐标动量可分离的哈密顿系统。对于坐标动量不可分离的哈密顿系统，需采用隐式辛算法迭代求解，迭代过程将降低计算效率。此时，显隐混合辛算法是不错的选择。

辛算法

显式辛算法

用于坐标动量可分离或显式可积分解的哈密顿系统，计算效率高

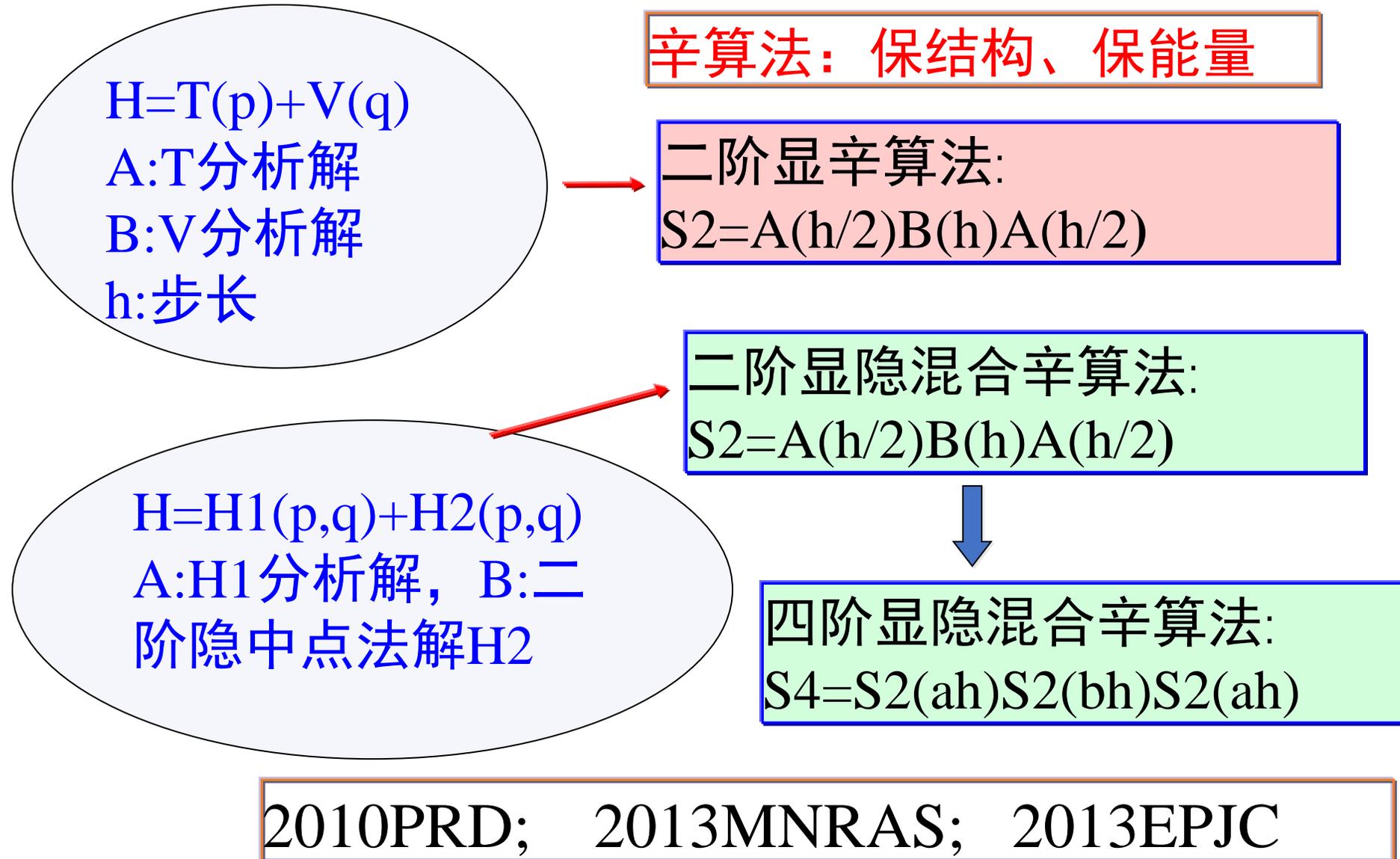
隐式辛算法

用于坐标动量不可分离或无显式可积分解的哈密顿系统。每次积分需要迭代，计算效率较低

显隐混合辛算法

用于坐标动量不可分离或无显式可积分解的哈密顿系统，计算效率优于全隐式辛算法

显隐混合辛算法



显隐混合辛算法

后牛顿自旋致密双星系统的哈密顿量为:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = H_N(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + H_{1PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + H_{2PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + H_{3PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + H_{SO}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) + H_{SS}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$$

其中

$$H_N = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{1}{r}$$

$$H_{1PN} = \frac{1}{8}(3\eta - 1)\mathbf{p}^4 - \frac{1}{2}[(3 + \eta)\mathbf{p}^2 + \eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2] \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2}$$

$$H_{2PN} = \frac{1}{16}(1 - 5\eta + 5\eta^2)\mathbf{p}^6 + \frac{1}{8}[(5 - 20\eta - 3\eta^2)\mathbf{p}^4 - 2\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2\mathbf{p}^2 - 3\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^4] \frac{1}{r} + \frac{1}{2}[(5 + 8\eta)\mathbf{p}^2 + 3\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2] \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4}(1 + 3\eta)\frac{1}{r^3}$$

$$H_{SS}(\mathbf{r}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \frac{1}{2r^3} [3(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{S}_0^2]$$

$$H_{SO} = \frac{1}{r^3} [g(\mathbf{r}, \mathbf{p})\mathbf{S} + g^*(\mathbf{r}, \mathbf{p})\mathbf{S}^*] \cdot \mathbf{L}$$

$$H_{3PN} = \frac{1}{128}(-5 + 35\eta - 70\eta^2 + 35\eta^3)\mathbf{p}^8 + \frac{1}{16} \left[(-7 + 42\eta - 53\eta^2 - 5\eta^3)\mathbf{p}^6 + (2 - 3\eta)\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2 \times \mathbf{p}^4 + 3(1 - \eta)\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^4\mathbf{p}^2 - 5\eta^3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^6 \right] \frac{1}{r} + \left[\frac{1}{16}(-27 + 136\eta + 109\eta^2)\mathbf{p}^4 + \frac{1}{16}(17 + 30\eta)\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2\mathbf{p}^2 + \frac{1}{12}(5 + 43\eta)\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^4 \right] \frac{1}{r^2} + \left\{ \left[-\frac{25}{8} + \left(\frac{1}{64}\pi^2 - \frac{335}{48} \right)\eta - \frac{23}{8}\eta^2 \right] \mathbf{p}^2 + \left(-\frac{85}{16} - \frac{3}{64}\pi^2 - \frac{7}{4}\eta \right) \eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2 \right\} \frac{1}{r^3} + \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{109}{12} - \frac{21}{32}\pi^2 \right) \eta \right] \frac{1}{r^4}$$

尽管该模型存在大量坐标动量耦合项，但是通过观察，可以找出坐标动量可分离部分(红色框内)。那么，整个哈密顿量可以分为两部分，一部分用显式辛算法求解，另一部分用隐式辛算法求解。

显隐混合辛算法

后牛顿自旋致密双星系统的哈密顿量可分为两部分：

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \frac{1}{8}(3\eta - 1)\mathbf{p}^4 + \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{16}(1 - 5\eta + 5\eta^2)\mathbf{p}^6 \\ &\quad - \frac{1}{4}(1 + 3\eta)\frac{1}{r^3} + \frac{1}{128}(-5 + 35\eta - 70\eta^2 + 35\eta^3)\mathbf{p}^8 \\ &\quad + \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{109}{12} - \frac{21}{32}\pi^2 \right) \eta \right] \frac{1}{r^4} + H_N, \end{aligned} \quad \Upsilon_2 = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) - \Upsilon_1$$

定义 $\mathbf{A}(\tau)$ 和 $\mathbf{B}(\tau)$ 分别为求解 Υ_1 和 Υ_2 的算子，其中 \mathbf{A} 为显式辛算法， \mathbf{B} 为隐式中点法，可得二阶、四阶显隐混合辛算法：

$$Y_2(\tau) = A\left(\frac{\tau}{2}\right) B(\tau) A\left(\frac{\tau}{2}\right) + \check{C}\tau^3 + \check{D}\tau^5 + \dots$$

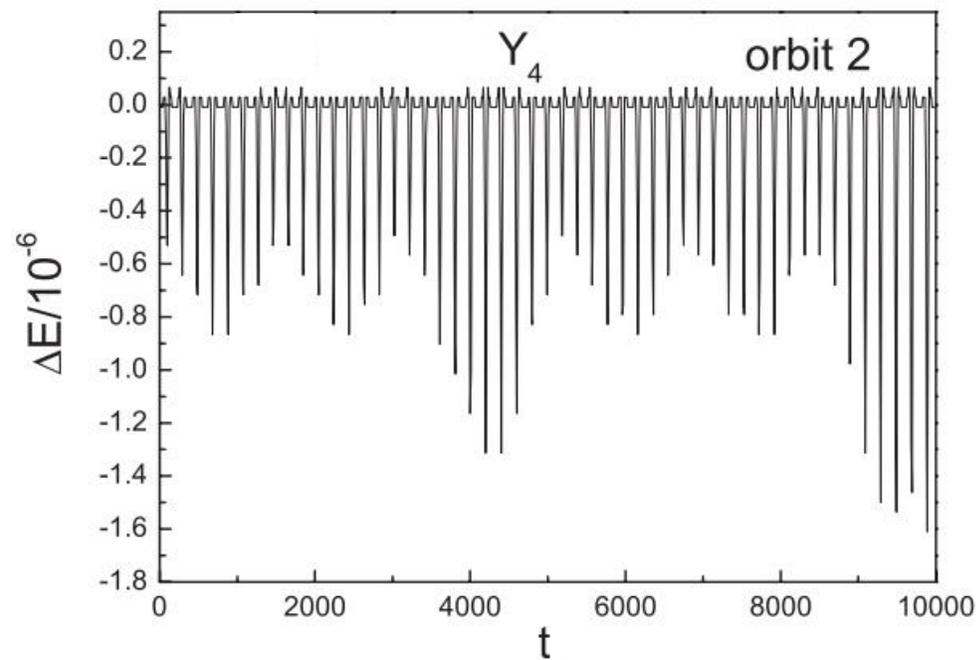
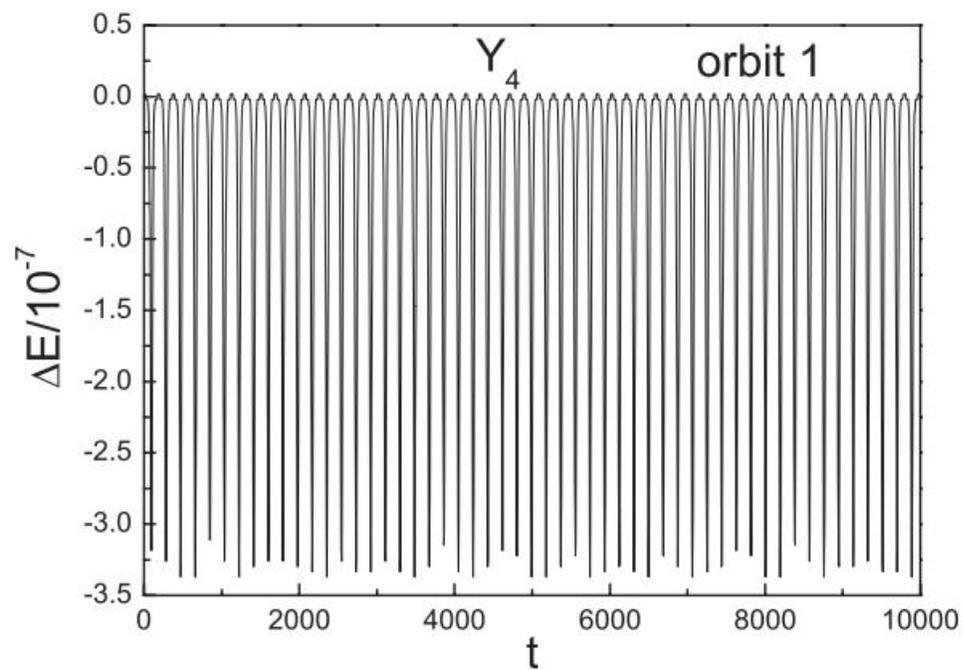
$$Y_4(\tau) = Y_2\left(\frac{\tau}{2-s}\right) Y_2\left(\frac{-s\tau}{2-s}\right) Y_2\left(\frac{\tau}{2-s}\right)$$

Mei, Ju, Wu, & Liu, Dynamics of spin effects of compact binaries, MNRAS, 2013.

显隐混合辛算法的能量误差

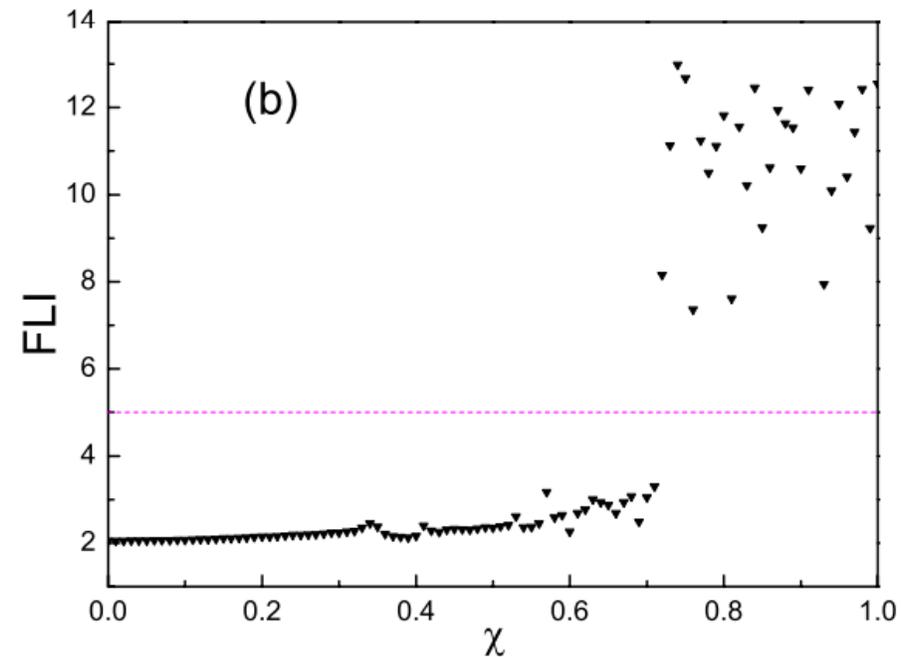
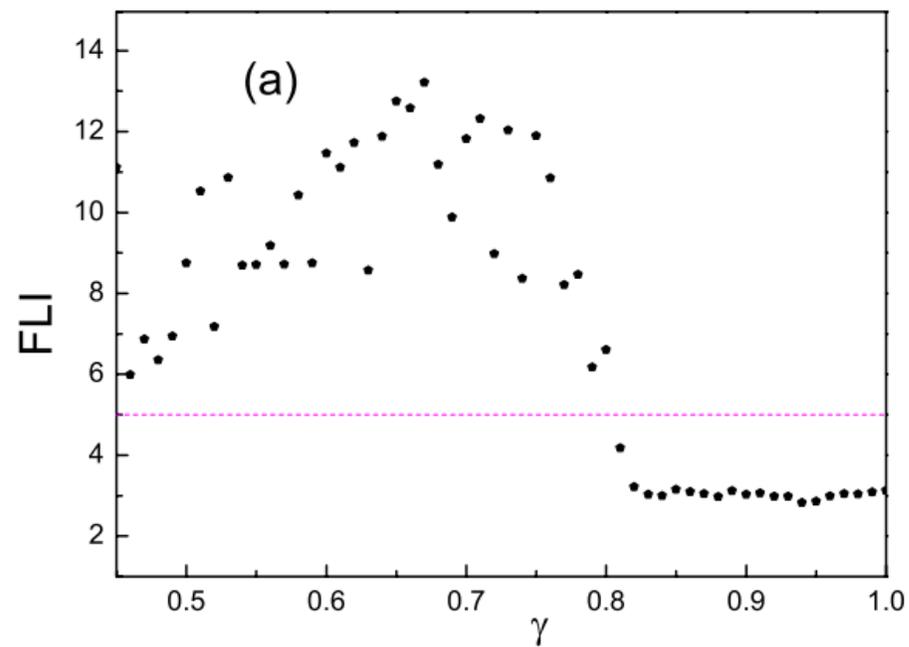
利用 Y_4 求解后牛顿自旋致密双星系统，算法的能量误差：

$$Y_4(\tau) = Y_2\left(\frac{\tau}{2-s}\right) Y_2\left(\frac{-s\tau}{2-s}\right) Y_2\left(\frac{\tau}{2-s}\right)$$



显隐混合辛算法在轨道动力学中的应用

利用显隐混合辛算法配合快速李雅普诺夫指标，研究双星质量比、自旋参数对轨道动力学的影响：

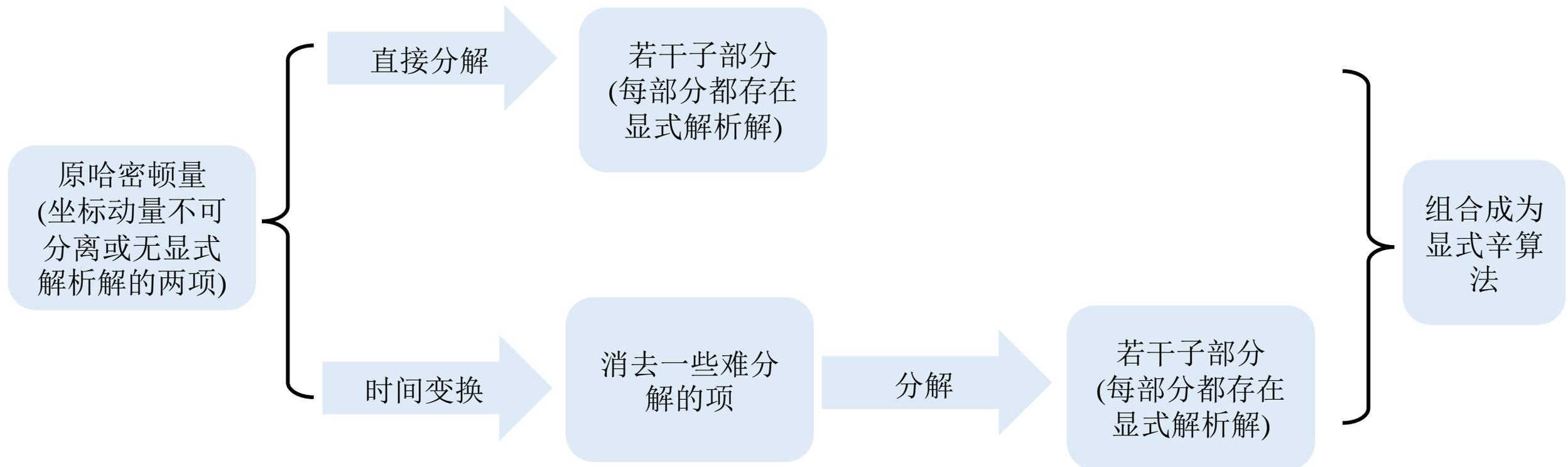


研究发现双星质量比较小、自旋参数较大时，容易产生混沌现象

2-5 黑洞时空显式辛算法

描述相对论时空黑洞的哈密顿量坐标动量不可分离，如何直接使用显式辛算法求解是一大难题。

将哈密顿量分解为多个含有显式解析解的部分，可构造显式辛算法，操作流程如下：



施瓦西时空显式辛算法的构造: 2021ApJ

施瓦西黑洞的哈密顿如下:

$$H = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} E^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{r}\right) p_r^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta}$$

显然, 整体不存在解析解, 无法使用显式辛算法。将此哈密顿分为四个部分:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4.$$

其中

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} E^2 \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} p_r^2 \quad \mathcal{H}_3 = -\frac{1}{r} p_r^2 \quad \mathcal{H}_4 = \frac{p_\theta^2}{2r^2}$$

每一部分均含有解析解

每一部分的求解可记作 $\psi_\tau^{H_i}$:

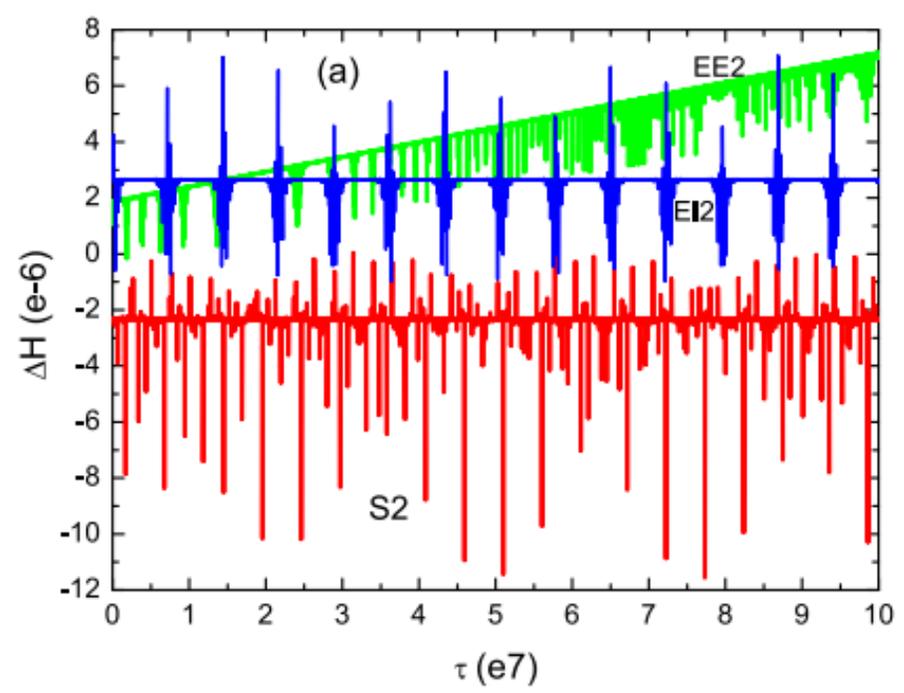
$$\begin{aligned} \psi_\tau^{\mathcal{H}_1}: \quad & p_r(\tau) = p_{r0} + \tau \left[\frac{\ell^2}{r_0^3 \sin^2 \theta_0} - \frac{E^2}{(r_0 - 2)^2} \right], \\ & p_\theta(\tau) = p_{\theta 0} + \tau \frac{\ell^2 \cos \theta_0}{r_0^2 \sin^3 \theta_0}, \\ \psi_\tau^{\mathcal{H}_2}: \quad & r(\tau) = r_0 + \tau p_{r0}; \\ \psi_\tau^{\mathcal{H}_3}: \quad & r(\tau) = [(r_0^2 - 3\tau p_{r0})^2 / r_0]^{1/3}, \\ & p_r(\tau) = p_{r0} [(r_0^2 - 3\tau p_{r0}) / r_0^2]^{1/3}; \\ \psi_\tau^{\mathcal{H}_4}: \quad & \theta(\tau) = \theta_0 + \tau p_{\theta 0} / r_0^2, \\ & p_r(\tau) = p_{r0} + \tau p_{\theta 0}^2 / r_0^3. \end{aligned}$$

组合为辛算法

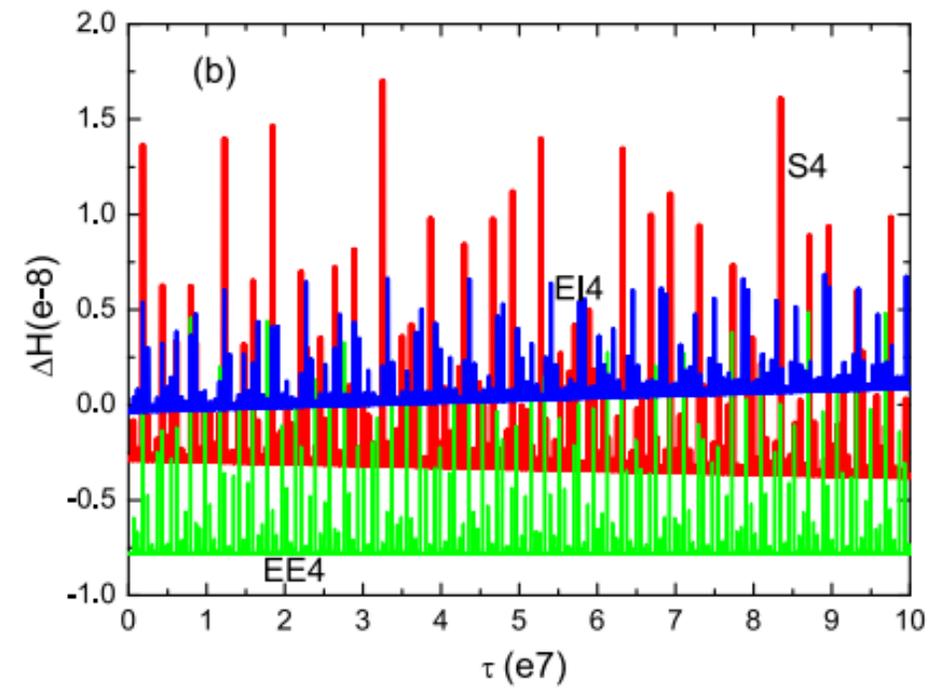
$$\psi_h^{\mathcal{H}} \approx S_2^{\mathcal{H}}(h) = \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_4} \circ \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_3} \circ \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_2} \circ \psi_h^{\mathcal{H}_1} \circ \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_2} \circ \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_3} \circ \psi_{h/2}^{\mathcal{H}_4}.$$

施瓦西时空显式辛算法的数值模拟

显隐混合辛算法(EI)、扩大相空间类辛算法(EE)、显式辛算法(S)的能量误差:



二阶算法



四阶算法

Wang, Sun, Liu, & Wu, Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. I. Schwarzschild Black Holes, ApJ, 2021.

施瓦西时空显式辛算法的数值模拟

显隐混合辛算法(EI)、扩大相空间类辛算法(EE)、显式辛算法(S)、龙库法的稳定性、精度、计算效率比较:

Table 1

Dependence of Stable (S) or Unstable (U) Behavior of Hamiltonian Errors for the Seven Algorithms on Step Size h

Method	S2	EI2	EE2	S4	EI4	EE4	RK4
$h = 0.1$	S	S	S	U	U	S	U
$h = 1.0$	S	S	U	S	U	S	U
$h = 10$	S	S	U	S	S	U	U

Note. Chaotic Orbit 3 in Figure 2 is integrated until proper time $\tau = 10^8$.

稳定性

Table 2

Same as Table 1, but Dependence of the Largest Absolute Values of Hamiltonian Errors on h

Method	S2	EI2	EE2	S4	EI4	EE4	RK4
$h = 0.1$	4e-8	4e-8	3e-8	7e-9	3e-12	1e-12	4e-12
$h = 1.0$	6e-6	5e-6	2e-6	3e-8	7e-9	2e-8	4e-7
$h = 10$	8e-4	6e-3	6e-3	4e-4	7e-5	4e-3	3e-2

精度

Table 3

Same as Table 1, but Dependence of Computational Cost, i.e., CPU Times (Minute: Second), on h

Method	S2	EI2	EE2	S4	EI4	EE4	RK4
$h = 0.1$	9:13	10:13	14:22	27:42	30:33	33:35	17:48
$h = 1.0$	0:56	1:03	1:26	2:46	3:09	3:21	1:46
$h = 10$	0:05	0:07	0:07	0:16	0:20	0:19	0:10

计算效率

科尔时空显式辛算法的构造: 2021ApJ

科尔时空的哈密顿量如下:

$$H = \mathbf{U} \cdot \mathbf{p} - \ell = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \\ = F + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{\Sigma},$$

$$F = \frac{1}{2} (g^{tt} E^2 + g^{\phi\phi} L^2) - g^{t\phi} EL \\ = \frac{1}{2} (f_1 E^2 + f_3 L^2) + f_2 EL \\ = -\frac{AE^2}{2\Delta\Sigma} + \frac{L^2(\Sigma - 2r)}{2\Delta\Sigma \sin^2 \theta} + \frac{2ar}{\Delta\Sigma} EL$$

$$g^{tt} = -\frac{A}{\Delta\Sigma}, \quad g^{t\phi} = -\frac{2ar}{\Delta\Sigma} = g^{\phi t} \\ g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma}, \\ g^{\phi\phi} = \frac{\Sigma - 2r}{\Delta\Sigma \sin^2 \theta}.$$

事实上, 将此哈密顿量分解为多个具有显式解析解的部分存在一定难度, 故引入时间变换函数 $d\tau = g(r, \theta) dw$

取时间变换函数: $g(r, \theta) = \frac{\Sigma}{r^2}$

得到新的时间变换哈密顿量: $\mathcal{H} = g(H + p_0) \longrightarrow \mathcal{H} = \frac{\Sigma}{r^2} (F + p_0) + \frac{\Delta}{2r^2} p_r^2 + \frac{1}{2r^2} p_\theta^2$, 此哈密顿量可分解为五个具有显式解析解的部分:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\Sigma}{r^2} (F + p_0) \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} p_r^2 \quad \mathcal{H}_3 = -\frac{1}{r} p_r^2 \quad \mathcal{H}_4 = \frac{a^2}{2r^2} p_r^2 \quad \mathcal{H}_5 = \frac{1}{2r^2} p_\theta^2$$

科尔时空显式辛算法的构造: 2021ApJ

每部分的求解如下:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\Sigma}{r^2}(F + p_0) \quad \tilde{\mathcal{H}}_1: \begin{aligned} \tau(w) &= \tau_0 + wg(r_0, \theta_0), \\ p_r(w) &= p_{r0} + wP_r(r_0, \theta_0), \\ p_\theta(w) &= p_{\theta0} + wP_\theta(r_0, \theta_0); \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}p_r^2 \quad \tilde{\mathcal{H}}_2: r(w) = r_0 + wp_{r0}$$

$$\mathcal{H}_3 = -\frac{1}{r}p_r^2 \quad \tilde{\mathcal{H}}_3: \begin{aligned} r(w) &= [(r_0^2 - 3wp_{r0})^2/r_0]^{\frac{1}{3}}, \\ p_r(w) &= p_{r0}[(r_0^2 - 3wp_{r0})/r_0^2]^{\frac{1}{3}}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_4 = \frac{a^2}{2r^2}p_r^2 \quad \tilde{\mathcal{H}}_4: \begin{aligned} r(w) &= (2a^2p_{r0}w/r_0 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}, \\ p_r(w) &= \frac{p_{r0}}{r_0}(2a^2p_{r0}w/r_0 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_5 = \frac{1}{2r^2}p_\theta^2 \quad \tilde{\mathcal{H}}_5: \begin{aligned} \theta(w) &= \theta_0 + wp_{\theta0}/r_0^2, \\ p_r(w) &= p_{r0} + wp_{\theta0}^2/r_0^3. \end{aligned}$$

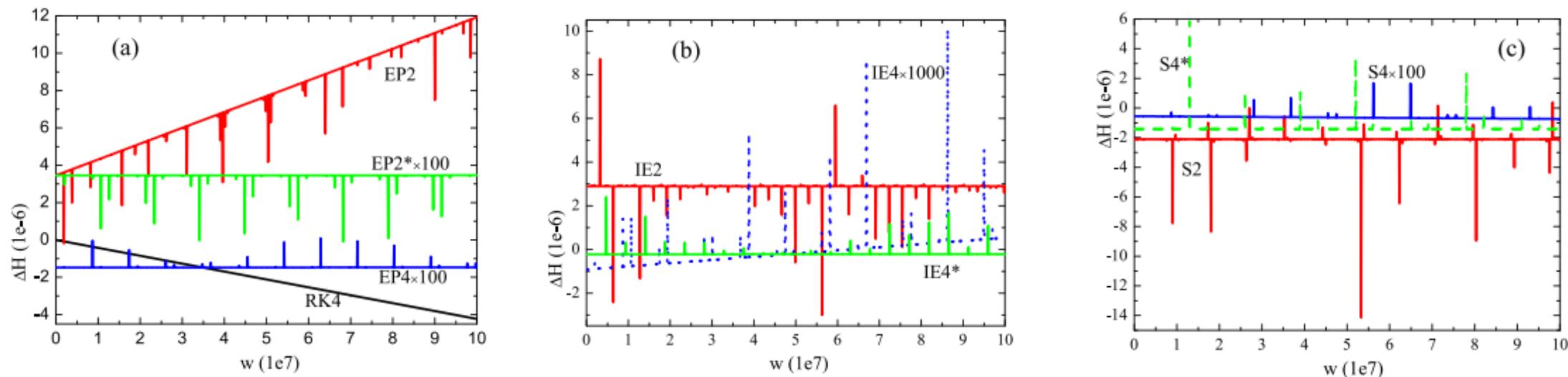
按蛙跳格式可组合成显式辛算法



$$\left\{ \begin{aligned} S_2^{\mathcal{H}}(h) &= \tilde{\mathcal{H}}_5\left(\frac{h}{2}\right) \circ \tilde{\mathcal{H}}_4\left(\frac{h}{2}\right) \circ \tilde{\mathcal{H}}_3\left(\frac{h}{2}\right) \circ \tilde{\mathcal{H}}_2\left(\frac{h}{2}\right) \\ &\quad \times \circ \tilde{\mathcal{H}}_1(h) \circ \tilde{\mathcal{H}}_2\left(\frac{h}{2}\right) \circ \tilde{\mathcal{H}}_3\left(\frac{h}{2}\right) \circ \tilde{\mathcal{H}}_4\left(\frac{h}{2}\right) \\ &\quad \times \circ \tilde{\mathcal{H}}_5\left(\frac{h}{2}\right). \\ S_4^{\mathcal{H}}(h) &= S_2^{\mathcal{H}}(\gamma h) \circ S_2^{\mathcal{H}}(\delta h) \circ S_2^{\mathcal{H}}(\gamma h) \end{aligned} \right.$$

科尔时空显式辛算法的数值模拟

扩大相空间类辛算法(EP)、显隐混合辛算法(IE)、显式辛算法(S)、龙库法(RK4)在科尔时空中的能量误差:



不同算法的计算效率比较:

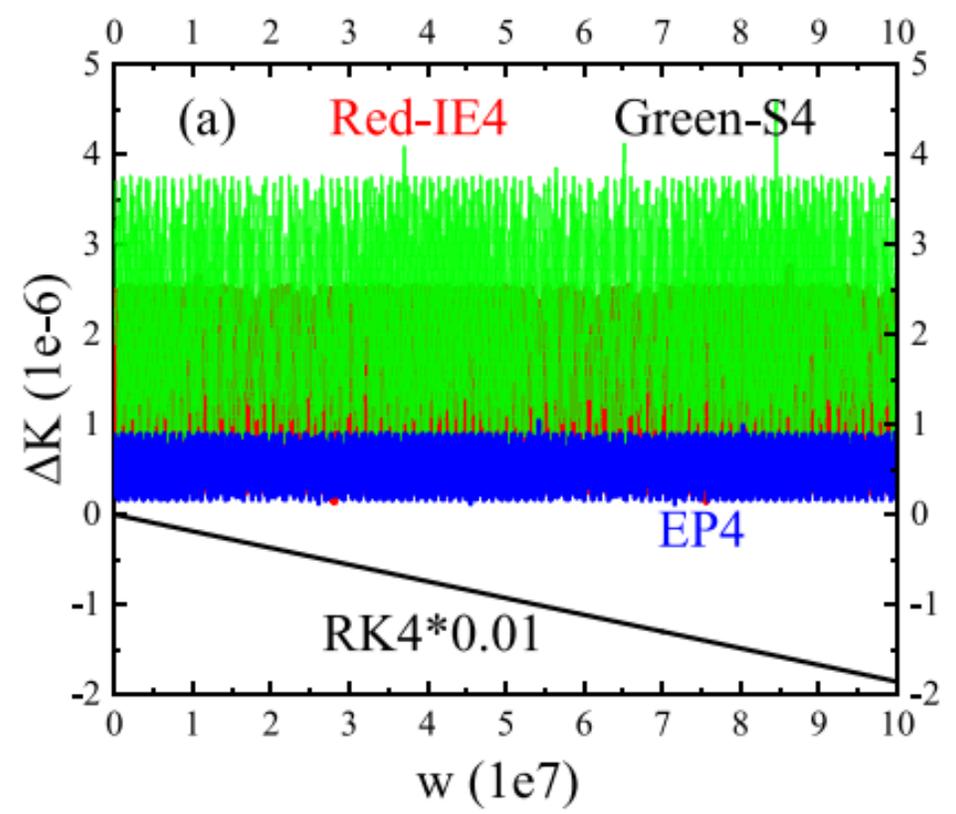
Table 1
Computational Cost (CPU Times in Minute' Second'') for the Algorithms in Figures 1 and 2

Method	RK4	EP2	EP2*	IE2	EP4	IE4	IE4*	S2	S4	S4*
Figure 1	2'4''	1'33''	15'45''	1'53''	3'37''	5'48''	1'33''	/	/	/
Figure 2	1'51''	1'21''	13'43''	1'43''	3'8''	5'26''	1'27''	57''	2'50''	43''

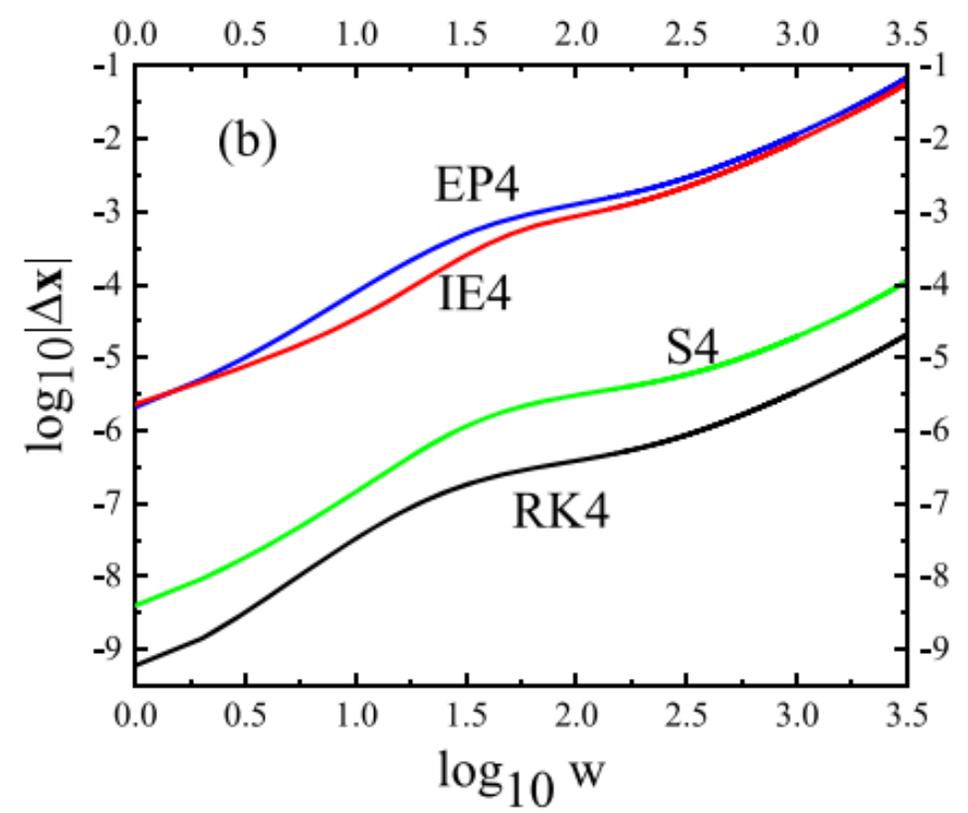
Wu, Wang, Sun, & Liu, Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. IV. Kerr Black Holes, ApJ, 2021.

科尔时空显式辛算法的数值模拟

扩大相空间类辛算法(EP)、显隐混合辛算法(IE)、显式辛算法(S)、龙库法(RK4)在科尔时空中的卡特常数误差、轨道误差:



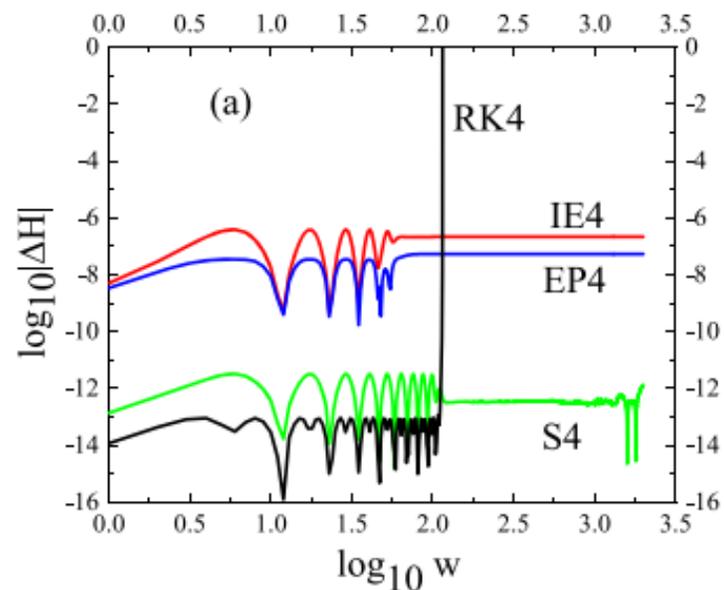
卡特常数误差



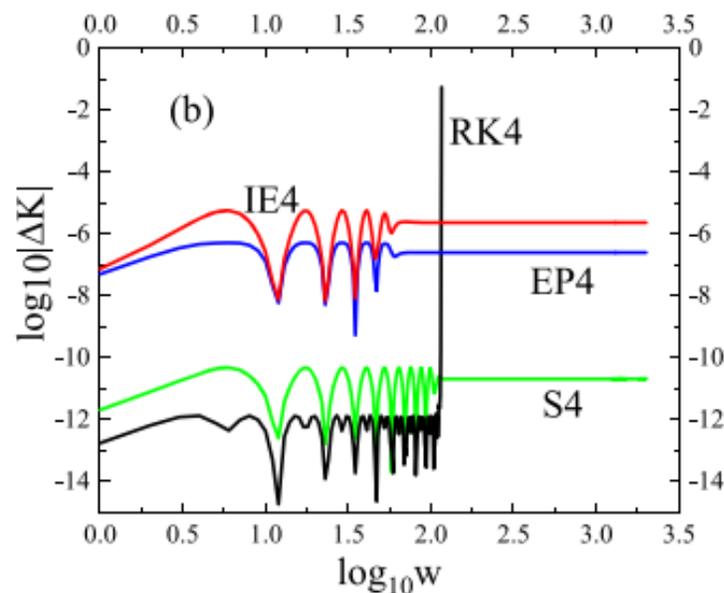
轨道误差

科尔时空显式辛算法的数值模拟

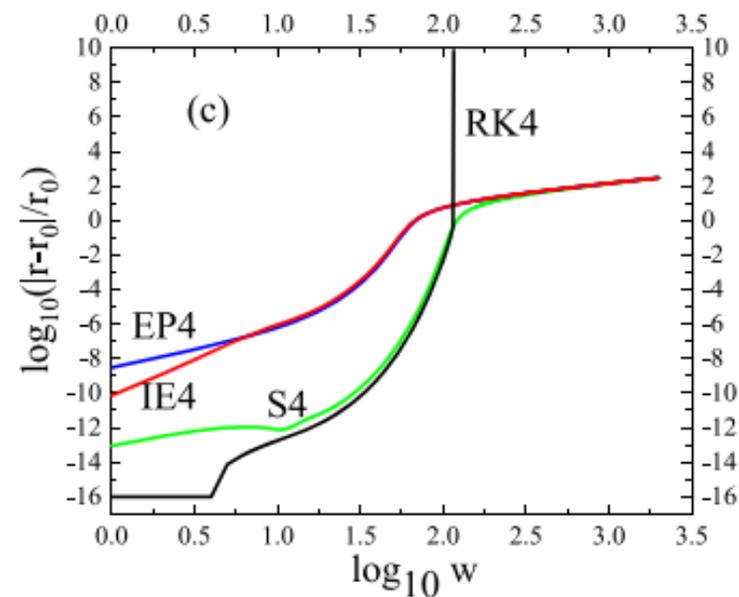
考虑实际的光子球轨道，显式辛算法(S4)具有更高的精度和稳定性：



能量误差



卡特常数误差



轨道误差

黑洞时空显辛算法系列工作

- (1) Xin Wu, Ying Wang, Wei Sun, Fu-Yao Liu, Wen-Biao Han. Explicit symplectic methods in black hole spacetimes, *The Astrophysical Journal*, accepted, 2022; ArXiv: 2210.13185 [gr-qc].
- (2) Naying Zhou, Hongxing Zhang, Wenfang Liu, Xin Wu. A Note on the Construction of Explicit Symplectic Integrators for Schwarzschild Spacetimes. *The Astrophysical Journal*, 927:160, 2022
- (3) Ying Wang, Wei Sun, Fu-yao Liu, Xin Wu. Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. I. Schwarzschild Black Holes. *ApJ*, 2021, 907, 66.
- (4) Ying Wang, Wei Sun, Fuyao Liu, Xin Wu. Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. II. Reissner-Nordström Black Holes. *The Astrophysical Journal*, 2021, 909, 22.
- (5) Ying Wang, Wei Sun, Fuyao Liu, Xin Wu. Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. III. Reissner-Nordström-(anti)-de Sitter Black Holes. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2021, 254, 8.
- (6) Xin Wu, Ying Wang, Wei Sun, Fuyao Liu. Construction of Explicit Symplectic Integrators in General Relativity. IV. Kerr Black Holes. *The Astrophysical Journal*, 2021, 914, 63.
- (7) Wei Sun, Ying Wang, Fuyao Liu, Xin Wu.. Applying explicit symplectic integrator to study chaos of charged particles around magnetized Kerr black hole. *European Physical Journal C*, 2021, 81, 785.

报告总结

理论工作:

- 构建了正则自旋变量，为自旋系统的可积判定和辛算法应用提供理论基础；
- 揭示同阶后牛顿拉格朗日系统与哈密顿系统不等价的关系，还提出了自洽后牛顿拉格朗日运动方程，为正确区分后牛顿系统动力学和辛算法构建提供了理论基础。

算法工作:

- 提出速度因子流形改正法；
- 利用二体问题积分不变关系，构造出适用于太阳系多体问题数值模拟的高精度流形改正法；
- 构造出适用于六维、八维、十维保守哈密顿系统的保能量算法；
- 发展了显隐混合辛算法、扩大相空间类辛算法；
- 开创性构建相对论时空显式辛算法。

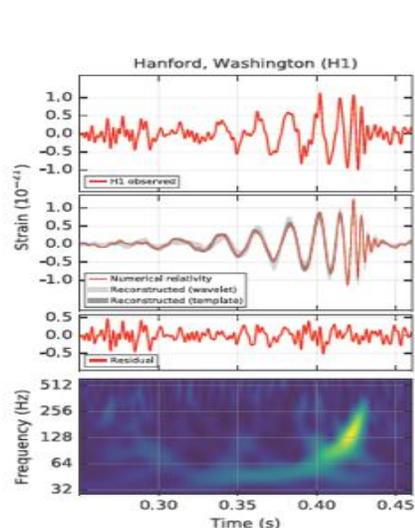
算法应用:

- 探索自旋参数、质量比、轨道偏心率对后牛顿自旋致密双星混沌轨道的影响，并给出混沌轨道的分布规律；这为研究处于绕转阶段的双星辐射的低频引力波提供参考；
- 研究了粒子在多种相对论时空中的动力学特征，有助于研究黑洞阴影和极端质量比系统的引力波辐射。

研究领域：相对论天体力学

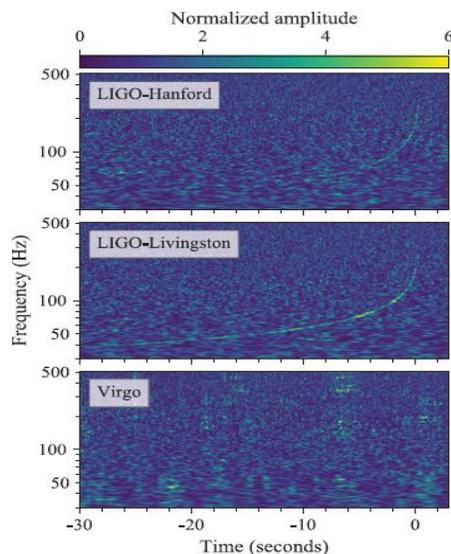
研究背景：引力波发现获2017年诺贝尔奖

研究方向



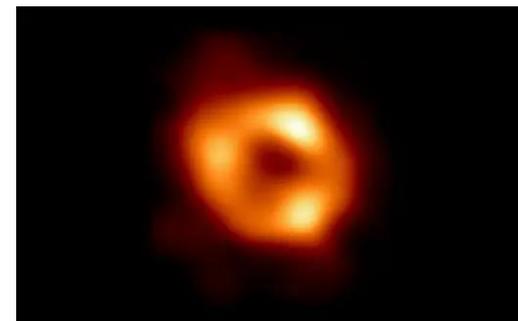
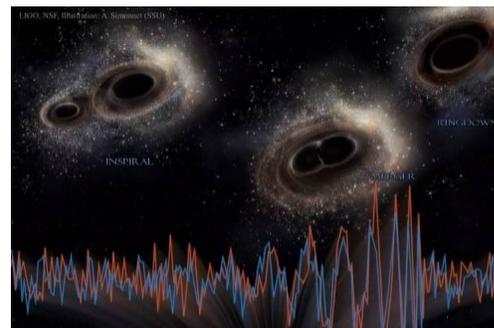
双黑洞并合

GW 150914
(Abbott et al. 2016)



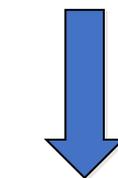
双中子星并合

GW 170817
(Abbott et al. 2017)

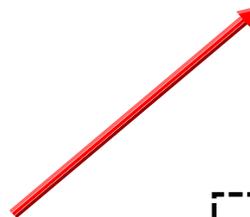


引力理论

轨道动力学性质



轨道计算



引力波形



黑洞阴影

感谢邀请！

谢谢大家！